

الدوائر الكهربائية

تأليف

جوزيف أ. ادمنستر

يحتوى الكتاب على أكثر من ٣٤٥
مسألة محلولة حلاً كاملاً

$$Q = VI \sin\theta = 2000 \sin 53.1^\circ = 1600 \text{ var}$$ (لاحقه)

$$\text{p.f.} = \cos\theta = \cos 53.1^\circ = 0.6$$ (لاحق)

الطريقة الثالثة :

$S = VI^* = (100\angle 30^\circ)(20\angle 23.1^\circ) = 2000\angle 53.1 = 1200 + j1600\,\text{VA}$ ومنها نجـد أن

(لا حقة) $P = 1200\,\text{W}, Q = 1600\,\text{var}$ و $S = 2000\,\text{VA}$ و $pf = \cos 53.1^\circ = 0.6$ (لاحق)

الطريقة الرابعة :

$$V_R = IR = 20\angle{-23.1^\circ}(3) = 60\angle{-23.1^\circ}\,\text{V},\ V_X = (20\angle{-23.1^\circ})(4\angle 90^\circ) = 80\angle 66.9^\circ\,\text{V}$$

$$P = V_R^2/R = 60^2/3 = 1200\,\text{W}$$

$$Q = V_X^2/X = 80^2/4 = 1600\,\text{var}$$ (لاحقة)

$$S = V^2/Z = 100^2/5 = 2000\,\text{VA}$$

$$\text{p.f.} = P/S = 0.6$$

يجب الاحتياط عند التعويض فى المعادلة $P = V_R^2/R$. والخطأ الشائع هو استبدال V_R (الجهد عبر المقاومة فقط) بالجهد الكلى V عبر المعاوقة Z .

تصحيح عامل القدرة :

فى التطبيقات المنزلية والصناعية يكون الحمل حثيا والتيار لاحقا للجهد المؤثر وتقاس القدرة المتوسطة P المعطاة للحمل بمقدار الشغل المستفاد به فى وحدة الزمن . وترسل القدرة عادة من خلال محولات وخطوط توزيع .

وحيث أن المحول الذى يقدر بـ kVA عادة ما يكون ثابتا عند جهد معين فإن معدل kVA يدل غالباً على مقدار أكبر تيار مسموح به . وإذا وصلت سعة نقية أو حث نقى فإن المحول يكون محملا تماما وتكون القدرة المتوسطة المعطاة تساوى صفرا نظريا

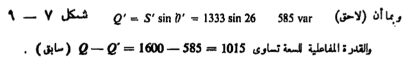
بالإشارة إلى مثلث القدرة ، يمثل وتر المثلث S قياس الحمل فى نظام التوزيع ويمثل الضلع P قياس القدرة المفيدة المعطاة . وعلى ذلك فإنه من المستحسن جعل S أقرب ما يمكن من P أى جعل الزاوية θ تقترب من الصفر . وحيث أن $fp = \cos\theta$ فإن عامل القدرة يقترب من الوحدة . وفى الحالة العادية التى يكون فيها حملا حثيا يمكن تحسين عامل القدرة وذلك بتوصيل سعة على التوازى مع الحمل . وبما أن الجهد على الحمل يظل ثابتا فإننا نلاحظ القدرة المفيدة p لا تتغير أيضا . وبما أن عامل القدرة يزداد فإن التيار والقدرة الظاهرية يقلان وبذلك نحصل على نظام توزيع ذى كفاءة عالية .

مثال ٢ :

فى دائرة المثال (١) صحح عامل القدرة إلى 0.9 (لاحق) وذلك بإضافة سعة على التوازى . أوجد S' بعد إدخال التصحيح وكذلك القدرة المفاعلية للسعة اللازمة للتصحيح .

بإعادة رسم مثلث القوى فى المثال (١) ، مع مراعاة أن $0.9 = \cos\theta'$ و $\theta' = 26°$ إذن

$$S' = P/\cos\theta' = 1200/\cos 26 = 1333 \text{ VA}$$



وبما أن (لاحق) $Q' = S'\sin\theta' = 1333\sin 26 = 585$ var

شكل ٧ — ٩

والقدرة المفاعلية للسعة تساوى $Q - Q' = 1600 - 585 = 1015$ (سابق) .

وحيث أن القدرة تظل ثابتة فإن الشغل المبذول يظل ثابتا بعد تصحيح عامل القدرة . وعلى ذلك فإن قيمة S تقل من 2000 VA إلى 1333 VA .

مســـــــائل محـــــلولة

٧ — ١ إذا أعطيت دائرة يؤثر عليها جهد $v = 150\sin(\omega t + 10°)$ volts وكان التيار الناتج $i = 5\sin(\omega t - 50°)$ amperes، فعين مثلث القدرة .

$$\mathbf{V} = (150/\sqrt{2})\angle 10° = 106\angle 10° \text{ V}$$

و $$\mathbf{I} = (5/\sqrt{2})\angle -50° = 3.54\angle -50° \text{ A}$$

إذن

$$S = \mathbf{VI}^* = (106\angle 10°)(3.54\angle 50°) = 375\angle 60° = 187.5 + j325 \text{ VA}$$

ومنها نجد أن

$$P = \text{Re}\,\mathbf{VI}^* = 187.5 \text{ W}$$

$$Q = \text{Im}\,\mathbf{VI}^* = 325 \text{ var} \quad \text{(لاحقة)}$$

$$S = |\mathbf{VI}^*| = 375 \text{ VA}$$

$$\text{p.f.} = \cos 60° = 0.5 \quad \text{(لاحق)}$$

شكل ٧ — ١٠

٧ — ٢ دائرة توالى تتكون من عنصرين لهما قدرة 940 W وعامل قدرة 0.707 سابق . فإذا كان الجهد المؤثر هو $v = 99\sin(6000t + 30°)$ volts فعين ثوابت الدائرة .

إن الصيغة المطاورة للجهد هى $V = (99/\sqrt{2})\angle 30^\circ = 70\angle 30$ V. ، والقدرة هى $P = VI\cos\theta$.

أى $940 = 70I(0.707)$ ، إذن $I = 19$. وبما أن عامل القدرة هو 0.707 سابق ، إذن يجب أن يسبق التيار المطاور الجهد بزاوية $\cos^{-1} 0707 = 45^\circ$ ، إذن $\mathbf{I} = 19\angle 75^\circ$A ومعاوقة الدائرة هى ..

$\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I} = (70\angle 30)/(19\angle 75) = 3.68\angle -45 = 2.6 - j2.6\Omega$. وبما أن $\mathbf{Z} = R - jX_C$

و $X_C = 1/\omega C$ ، إذن

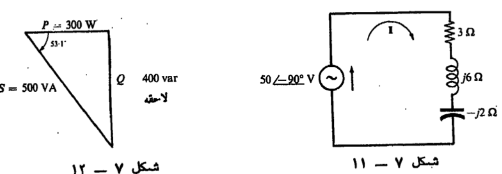
$$R = 2.6 \text{ ohms and } C = \frac{1}{6000(2.6)} = 64.1\ \mu\text{F}$$

طريقة اخرى :

بوضع $I = 19$ فى المعادلة $P = I^2R$ نحصل على $940 = (19)^2R$ ومنها $R = 2.6\Omega$.

إذن $\mathbf{Z} = Z\angle -45^\circ = 2.6 - jX_C$ و $X_C = 2.6\,\Omega$ ومنها ينتج أن $C = 1/\omega X_C = 64.1\ \mu$F .

٧ – ٣ عين مثلث القدرة لدائرة التوالى الموضحة فى الشكل ٧–١١ .



شكل ٧ — ١٢ شكل ٧ — ١١

من الشكل ٧–١١ نجد أن $\mathbf{Z} = 3 + j6 - j2 = 5\angle 53.1^\circ\ \Omega$

و $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z} = (50\angle -90^\circ)/(5\angle 53.1) = 10\angle -143.1^\circ$ A

إذن

$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}^* = (50\angle -90)(10\angle 143.1^\circ) = 500\angle 53.1 = 300 + j400$ VA

وأضلاع مثلث القدرة الموضح فى الشكل ٧–١٢ هى

$P = 300$ W و $Q = 400$ var (لاحقة) و $S = 500$ VA ، أما عامل القدرة فهو

$pf = \cos 53.1 = 0.6$ (لاحق)

طريقة اخرى :

بالتعويض عن $I = 10$ فى معادلة القدرة لكل عنصر نجد أن

$P = I^2R = 10^2(3) = 300$ W و $Q_{j6} = 10^2(6) = 600$ var (لاحقة) و (سابقة)

$Q_{-j2} = 10^2(2) = 200$ var (لاحقة) و $Q = Q_{j6} + Q_{-j2} = 600 - 200 = 400$ var .

٧ — ٤ إذا كانت القيمة الفعالة للتيار الكلى المار فى الدائرة الموضحة فى الشكل ٧ — ١٣ هى $30\,A$ فعين علاقات القدرة .

بفرض

شكل ٧ — ١٣

$$I_T = 30\angle 0\ \text{A}, \quad I_2 = 30\angle 0^\circ \left(\frac{5 - j3}{9 - j3}\right) = 18{\cdot}45\angle -12{\cdot}55^\circ\ \text{A}$$

و

$$I_1 = 30\angle 0 \left(\frac{4}{9 - j3}\right) = 12{\cdot}7\angle 18{\cdot}45^\circ\ \text{A}$$ إذن

$$P = I_2^2 R_4 + I_1^2 R_5 = (18{\cdot}45)^2 (4) + (12{\cdot}7)^2 (5) = 2165\ \text{W}$$

$$Q = I_1^2 X = (12{\cdot}7)^2(3) = 483\ \text{var}$$ (سابقة)

$$S = P - jQ = 2165 - j483 = 2210\angle -12{\cdot}6^\circ,\ S = 2210\ \text{VA}$$

$$\text{p.f.} = P/S = 2165/2210 = 0{\cdot}98$$ (سابق)

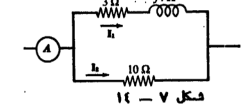
ويمكن أيضا الحصول على النتائج السابقة وذلك بحساب المعاوقة المكافئة

$$Z_{eq} = \frac{(5 - j3)4}{9 - j3} = 2{\cdot}4 - j0{\cdot}533\ \Omega$$

إذن

$$Q = 30^2(0{\cdot}533) = 479{\cdot}7\ \text{var}$$ (سابقة) و $$P = I_T^2 R = 30^2(2{\cdot}4) = 2160\ \text{W}$$

٧ — ٥ إذا كانت القدرة الكلية لدائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٧ — ١٤ هى $1100\ W$ فأوجد القدرة لكل مقاومة وكذلك قراءة الاميتر .



شكل ٧ — ١٤

من الشكل ٧—١٤ نحصل على

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{V}{3 + j4} = \frac{V}{5\angle 53{\cdot}1^\circ},\quad I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{V}{10}$$

والنسبة بين قيم التيارين هى $\frac{I_1}{I_2} = \frac{V/5}{V/10} = \frac{2}{1}$ ، وباستخدام العلاقة $P = I^2R$ نجد أن النسبة بين القدرتين للمقاومتين $10\,\Omega,\ 3\Omega$ هى

$$\frac{P_3}{P_{10}} = \frac{I_1^2 R_1}{I_2^2 R_2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$

وبما أن $P_T = P_3 + P_{10}$. إذن بقسمة طرفى المعادلة على P_{10} نجد أن $P_T/P_{10} = P_3/P_{10} + 1$

$$P_{10} = 1100(5/11) = 500\ \text{W},\ P_3 = 1100 - 500 = 600\ \text{W}$$

وبما أن $P = I^2R$ أى أن $I_1^2(3) = 600$ إذن $I_1 = 14.14$ A ، إذا كان $\mathbf{V} = V\angle 0°$

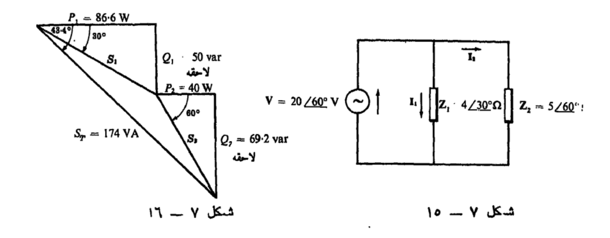
إذن $\mathbf{I}_1 = 14.14\angle -53.1° = 8.48 - j11.31$ A

$\mathbf{I}_2 = 7.07\angle 0 = 7.07$ A

وبهذا نجد أن $I_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 15.55 - j11.31 = 19.25\angle -36°$ A

وقراءة الأميتر هى 19.25 A.

٧ – ٩ عين مثلث القدرة لكل فرع من أفرع دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٧ – ١٥ ثم اجمعهما لتحصل على مثلث القدرة للدائرة كلها .



شكل ٧ — ١٦ شكل ٧ — ١٥

الفرع ١ :

$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_1 = (20\angle 60°)/(4\angle 30°) = 5\angle 30°$ A

$\mathbf{S}_1 = \mathbf{V}\mathbf{I}_1^* = (20\angle 60°)(5\angle -30°) = 100\angle 30°$ VA $= 86.6 + j50$ VA

إذن

$P_1 = \text{Re}\,\mathbf{V}\mathbf{I}_1^* = 86.6$ W

$Q_1 = \text{Im}\,\mathbf{V}\mathbf{I}_1^* = 50$ var (لاحقة)

$S_1 = |\mathbf{V}\mathbf{I}_1^*| = 100$ VA

p.f.$_1 = P_1/S_1 = 0.866$ (لاحق)

الفرع ٢ :

$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_2 = (20\angle 60°)/(5\angle 60°) = 4\angle 0°$ A

$\mathbf{S}_2 = \mathbf{V}\mathbf{I}_2^* = (20\angle 60°)(4\angle 0°) = 80\angle 60°$ VA $= 40 + j69.2$ VA

إذن

$P_2 = 40$ W

$Q_2 = 69.2$ var (لاحقة)

$S_2 = 80$ VA

p.f.$_2 = 0.5$ (لاحق)

من النتيجة السابقة والشكل ٧–١٦ يمكن الحصول على مثلث القدرة كما يلى

$P_T = P_1 + P_2 = 86{\cdot}6 + 40 = 126{\cdot}6$ W و (لاحقة) $Q_T = Q_1 + Q_2 = 50 + 69{\cdot}2 = 119{\cdot}2$ var

وبما أن $\mathbf{S}_T = P_T + jQ_T = 126{\cdot}6 + j119{\cdot}2 = 174\angle 43{\cdot}4^\circ$ VA

إذن $S_T = |\mathbf{S}_T| = 174$ VA و (لاحق) $\text{p.f.}_T = P_T/S_T = 126{\cdot}6/174 = 0{\cdot}727$

٧ – ٧ محرك حثى يعطى قدرة 2 hp وكفاءته 85% ، فإذا كان عامل القدرة يساوى 0·8 لاحق ، فعين المعادلات الكاملة للقدرة الداخلة .

بما أن $1\ \text{hp} = 746\ W$ إذن $P_{\text{in}} = 2(746)/0{\cdot}85 = 1755$ W

و $S = 1755/0{\cdot}8 = 2190$ VA ولكن $\theta = \cos^{-1}(0{\cdot}8) = 36{\cdot}9^\circ$

إذن (لاحقة) $Q = 2190 \sin 36{\cdot}9^\circ = 1315$ var

٧ – ٨ عين مثلث القدرة لدائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٧ – ١٧ علما بأن القدرة فى المقاومة 2 Ω هى 20W

من $P = I^2R$ نجد أن $I_1^2(20) = 20$ w إذن

$I_1 = 3.16$ A وبما أن $\mathbf{Z}_1 = 2 - j5 = 5{\cdot}38\angle -68{\cdot}2^\circ\ \Omega$

إذن $V = I_1Z = 3{\cdot}16(5{\cdot}38) = 17$ volts وإذا كان

$\mathbf{V} = 17\angle 0^\circ$ V

I_T, I_1, I_2, 2 Ω, 1 Ω, $-j5\ \Omega$, $j1\ \Omega$

شكل ٧ — ١٧

إذن $\mathbf{I}_1 = 3{\cdot}16\angle 68{\cdot}2^\circ$ A, $\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_2 = (17\angle 0)/(\sqrt{2}\angle 45)$ A

و $\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 11{\cdot}1\angle 29{\cdot}8$ A

ولحساب مثلث القدرة فإنه يلزمنا معرفة S_T

$$S_T = \mathbf{V}\mathbf{I}_T^* = 17\angle 0^\circ(11{\cdot}1\angle 29{\cdot}8^\circ) = 189\angle 29{\cdot}8^\circ = 164 + j94\ \text{VA}$$

ومنها نجد أن

(لاحقة) $P_T = 164$ W, $Q_T = 94$ var $\quad S_T = 189$ VA, (لاحق) $\text{p.f.} = 164/189 = 0.868$

٧ – ٩ عين مركبات القدرة لمجموعة ثلاثة أحمال بالمواصفات الآتية : الحمل ١، 250 VA و p.f. 0.5 لاحق ، حمل ٢ 180 W و p.f. 0.8 سابق ، حمل ٣ 300 VA ، 100 var (لاحقة)

يلزمنا حساب القدرة المتوسطة والقدرة المفاعلية لكل حمل أى أن

حمل ١ : معطى $S = 250\ VA$ و $p.f. = 0.5$ لاحق ، إذن

$$\theta = \cos^{-1}0.5 = 60°,\ P = S\, p.f. = 250(0.5) = 125\ W \quad \text{(لاحقة)}$$

$$Q = S \sin\theta = 250 \sin 60 = 216\ var$$

حمل ٢ : معطى $P = 180\ W$ و $p.f. = 0.8$ سابق . إذن

$$\theta = \cos^{-1} 0.8 = 36{\cdot}9°,\quad S = P/p.f. = 180/0.8 = 225\ VA$$

$$Q = 225 \sin 36.9° = 135\ var \ (\text{سابقة})$$

حمل ٣ : معطى $S = 300\ VA$ و $Q = 100\ var$ (لاحقة)

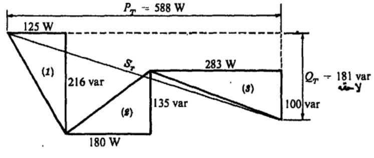
$$\theta = \sin^{-1}(Q/S) = \sin^{-1}(100/300) = 19{\cdot}5° \quad \text{و} \quad P = S\cos\theta = 300 \cos 19{\cdot}5° = 283\ W$$

إذن $P_T = 125 + 180 + 283 = 588\ W$ ، $Q_T = 216 - 135 + 100 = 181\ var$ (لاحقة)

وبما أن $S_T = P_T + jQ_T = 588 + j181 = 616\angle 17{\cdot}1°\ VA$ أى أن

$$S_T = 616VA \ \text{و(لاحق)}\ p.f. = P/S = 588/616 = 0.955$$

ويوضح الشكل ٧ — ١٨ مثلثات القوى للأحمال الثلاثة كل على حدة وكذلك لمجموعة الأحمال



شكل ٧ — ١٨

٧—١٠ محول $25\,kVA$ يغذى حملا بقدرة $12\ kW$ ، فإذا كان عامل القدرة 0.6 لاحقا ، فأوجد النسبة المئوية لأقصى حمل يمكن أن يغذيه المحول . وإذا أضيف حمل بعامل قدرة يساوى الوحدة إلى نفس المحول فما هوعدد الـ k W التى يمكن إضافتها قبل أن يصبح المحول محمل تماما .

فى حالة حمل $12\ kW$ نجد أن $S = P/p.f = 12/0.6 = 20\ kVA$ إذن النسبة المئوية لأقصى حمل تساوى $(20/25)100 = 80\%$

وبما أن $\theta = \cos^{-1}0{\cdot}6 = 53{\cdot}1°,\ Q = S\sin\theta = 20 \sin 53{\cdot}1° = 16\ kvar$

وبما أن عامل القدرة للحمل الإضافي يساوي الوحدة ،

إذن القدرة المفاعلية تظل دون تغيير . إذن عند التحميل

بأقصى سعة تكون الزاوية $\theta' = \sin^{-1}(16/25) = 39{\cdot}8$

والقدرة الكلية

$$P_T = S'\cos\theta' = 25\cos 39{\cdot}8^\circ = 19{\cdot}2\ \text{kW}$$

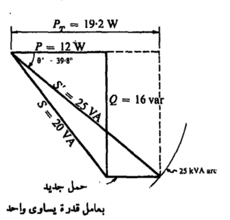
وعلى ذلك فإن الحمل الإضافي يساوي

$$P_T - P = 19.2 - 12$$

$$= 7.2\,\text{kW}$$

ويمكن الوصول إلى النتيجة السابقة بيانيا كما هو

موضح في الشكل ٧–١٩ .



شكل ٧ — ١٩

لاحظ أن إضافة حمل بعامل قدرة يساوي الوحدة

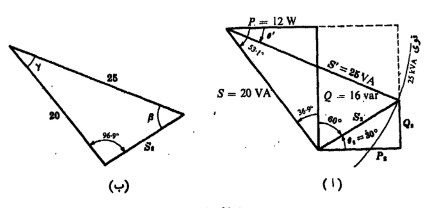
يحسن عامل القدرة الكلي أي أن : $P.f. = \cos 39.8^\circ = 0.768$ (لاحق)

٧–١١ في المسألة ٧–١٠ ، إذا كان الحمل المضاف له عامل قدرة يساوي 0.866 سابق فأوجد عدد الـ k VA التي يمكن إضافتها بهذه الأحمال حتى يصبح المحول محملا بسعته الكاملة .

لدينا من المسألة ٧ – ١٠ أن $S = 20\,\text{kVA}$ و $\theta = 53.1^\circ$ (لاحقة) ، $Q = 16$ kvar نرسم مثلث القدرة كما في الشكل ٧ – ٢٠ (١) ، وبإضافة حمل جديد له S_2 وزاوية $\theta_2 = \cos^{-1}0.866 = 30^\circ$ فإنه يلزمنا تحديد θ' ، ومن الشكل ٧ – ١٠ (ب) لدينا .

$$25/\sin 96{\cdot}9^\circ = 20/\sin\beta,\ \sin\beta = 0{\cdot}795,\ \beta = 52{\cdot}6^\circ$$

إذن $\gamma = 180^\circ - (96{\cdot}9^\circ + 52{\cdot}6^\circ) = 30{\cdot}5^\circ$ و $\theta' = 53{\cdot}1^\circ - 30{\cdot}5^\circ = 22{\cdot}6^\circ$.



شكل ٧ — ٢٠

والقدرة والقدرة المفاعلية للحمل الكلى هما $P_T = 25 \cos 22{\cdot}6^\circ = 23{\cdot}1$ kW و (لاحقة)

$Q_T = 25 \sin 22{\cdot}6^\circ = 9{\cdot}6$ kvar على الترتيب . إذن لدينا الحمل الإضافى $P_2 = 23{\cdot}1 - 12 = 11{\cdot}1$ kW

و (سابقة) $Q_2 = 16 - 9{\cdot}6 = 6{\cdot}4$ kvar ، وبما أن $S_2 = P_2 + jQ_2 = 11{\cdot}1 - j6{\cdot}4 = 12{\cdot}8\angle\underline{30^\circ}$ VA

إذن
$$S_2 = 12.8 \text{ k VA}$$

وعلى ذلك فإنه يمكن إضافة حمل جديد له 12.8 k VA بعامل قدرة 0.866 سابق إلى الحمل الأصلى 12 kW الذى عامل القدرة له يساوى 0.6 لاحق حتى يصبح المحول بكامل سعته .

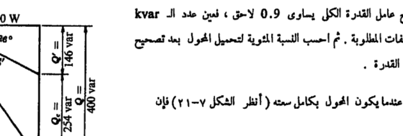
طريقة اخرى :

من الشكل ٧ – ٢٠ (ا) والزاوية $\theta_2 = 30^\circ$ ، لدينا

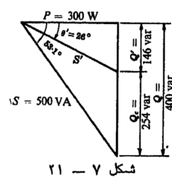
$$P_2 = S_2 \cos 30^\circ = (\sqrt{3/2})S_2, \; Q_2 = S_2 \sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}S_2$$

وبما أن
$$(S')^2 = (P + P_2)^2 + (Q - Q_2)^2$$

وبالتعويض ينتج أن $(25)^2 = (12 + \sqrt{3/2}\, S_2)^2 + (16 - \tfrac{1}{2}S_2)^2$ ، $S_2 = 12{\cdot}8$ kVA



٧ – ١٢ محول 500 k VA يعمل بكامل سعته بعامل قدرة كلى يساوى 0.6 لاحق . فإذا أريد تحسين عامل القدرة بإضافة مجموعة مكثفات حتى يصبح عامل القدرة الكلى يساوى 0.9 لاحق ، فعين عدد الـ kvar المكثفات المطلوبة . ثم احسب النسبة المئوية لتحميل المحول بعد تصحيح عامل القدرة .



شكل ٧ — ٢١

عندما يكون المحول بكامل سعته (أنظر الشكل ٧–٢١) فإن

$$P = VI \cos\theta = 500(0{\cdot}6) = 300 \text{ kW}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0{\cdot}6 = 53{\cdot}1^\circ$$

$$Q = VI \sin\theta = 500 \sin 53{\cdot}1^\circ = 400 \text{ kvar} \quad \text{(لاحقة)}$$

وعندما يكون p.f. = 0.9 لاحق ، فإن

$\theta' = \cos^{-1} 0{\cdot}9 = 26^\circ$ و $S' = 300/0{\cdot}9 = 333$ kVA ، $Q' = 333 \sin 26^\circ = 146$ kvar (لاحقة)

إذن عدد kvar المكثفات اللازمة هى

$$Q - Q' = 400 - 146 = 254 \quad \text{(سابقة)}$$

والنسبة المئوية للتحميل هى $(333/500)100 = 66.7\%$

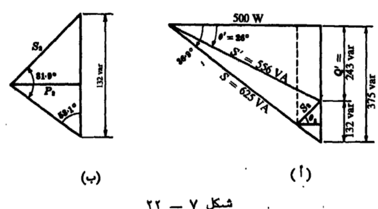
٧ – ١٣ مجموعة من المحركات الحثية متوسط قدرتها الكلية 500 kW وعامل القدرة لها 0.8 لاحق ، يراد إعادة تشغيلها جزئيا بمجموعة محركات تزامنية لها نفس الكفاءة ولكن عامل القدرة لها 0.707 سابق . ومع استمرار برنامج التشغيل يتحسن عامل القدرة باستمرار . أوجد النسبة المئوية للحمل الذى يمكن توصيله عندما يصل عامل القدرة للمجموعة 0.9 لاحق .

بما أن المحركات التزامنية لها نفس كفاءة المحركات الحثية فإن متوسط القدرة الكلية يبقى ثابتا عند 500 kW ، ولدينا قبل إعادة تشغيل المحركات .

$S = 500/0{\cdot}8 = 625$ kVA ، $\theta = \cos^{-1}0{\cdot}8 = 36{\cdot}9°$ ، $Q = 625 \sin 36{\cdot}9° = 375$ kvar لاحقة

وعندما يصبح عامل القدرة 0.9 لاحقا يكون

$\theta' = \cos^{-1}0{\cdot}9 = 26°$ ، $S' = 500/0{\cdot}9 = 556$ kVA ، $Q' = 556 \sin 26° = 243$ kvar لاحقة



شكل ٧ — ٢٢

وبما أن عامل القدرة للمحركات التزامنية 0.707 سابق ، أى أن $\theta_2 = \cos^{-1}0{\cdot}707 = 45°$

إذن من الشكل ٧–٢٢ (ب) وتطبيق قانون الجيب نحصل على

$$S_2/\sin 53{\cdot}1° = 132/\sin 81{\cdot}9°,\ S_2 = 106{\cdot}5 \text{ kVA}$$

إذن

$$P_2 = 106{\cdot}5 \cos 45° = 75{\cdot}3 \text{ kW}$$

والنسبة المئوية للتحميل هى $(75.3/500)\ 100 = 15\%$

مســـــائل اضــــــافية

٧ – ١٤ عين بالكامل مثلث القدرة لدائرة ، إذا علمت أن الجهد المؤثر هو $v = 200 \sin(\omega t + 110°)$ volts والتيار الناتج هو $i = 5 \sin(\omega t + 20°)$ amperes الجواب : لاحقة $Q = 500$ var و $P = 0$

٧ – ١٥ عين بالكامل مثلث القدرة لدائرة ، إذا علمت أن الجهد المؤثر هو $v = 14{\cdot}14 \cos \omega t$ volts والتيار الناتج هو

$i = 17{\cdot}1 \cos(\omega t - 14{\cdot}05°)$ milli- amperes

الجواب : $p.f. = 0.97$ لاحق ، $Q = 29.6$ mvar لاحقة ، $P = 117.5$ milliwatts

٧ – ١٦ عين بالكامل مثلث القدرة لدائرة ، إذا علمت أن الجهد المؤثر هو $v = 340 \sin(\omega t - 60°)$ volts والتيار الناتج هو $i = 13{\cdot}3 \sin(\omega t - 48{\cdot}7°)$ amperes

الجواب : $Q = 442$ var سابقة ، $P = 2215$ W $p.f. = 0.98$ سابق

٧ – ١٧ عين مثلث القدرة لدائرة توالى تتكون من عنصرين $R = 10\,\Omega$ ، $X_C = 5\,\Omega$ إذا علمت أن القيمة الفعالة للجهدالمؤثر هى 120 V .

الجواب : $S = 1154 - j577$ VA, $p.f. = 0.894$ سابق

٧ – ١٨ عين مثلث القدرة لدائرة توالى تتكون من عنصرين $R = 5\,\Omega$ و $X_L = 15\,\Omega$ إذا علمت أن القيمة الفعالة للجهد عبر المقاومة هى 31.6 V

الجواب : $S = 200 + j\,600$ VA, $p.f. = 0.316$ لاحق

٧ – ١٩ عين المعلومات الكاملة عن قدرة دائرة توالى تتكون من عنصرين $R = 8\,\Omega$ و $X_C = 6\,\Omega$ إذا علمت أن الجهد المؤثر هــو $V = 50\angle{-90°}$ V

الجواب : $S = 200 - j150$ VA, $p.f. = 0{\cdot}8$ سابق .

٧ – ٢٠ عين معاوقة الدائرة التى تأخذ 5040VA بعامل القدرة 0.894 سابق إذا كان الجهد المطاور المؤثر هو $V = 150\angle 45°$ V الجواب : $4 - j2\,\Omega$

٧ – ٢١ معاوقة تأخذ 3500VA بعامل قدرة 0.76 لاحق ، فإذا كانت القيمة الفعالة للتيار المار فى المعاوقة هى 18 A فعين هذه المعاوقــة .

الجواب : $8{\cdot}21 + j7{\cdot}0\,\Omega$

٧ – ٢٢ دائرة توالى تتكون من عنصرين، فإذا كانت معادلة التيار الحظى المار بها هى $i = 4{\cdot}24 \sin(5000t + 45°)$ amperes وقدرة الدائرة 180 W وعامل القدرة 0.8 لاحق ، فعين ثوابت الدائرة .

الجواب : $L = 3$ mH و $R = 20$ ohms

٧ — ٢٣ معاوقتان $Z_1 = 5{\cdot}83\angle{-59^\circ}\ \Omega$ ، $Z_2 = 8{\cdot}95\angle{63{\cdot}4^\circ}\ \Omega$ متصلتان على التوالى ، فإذا كانت القيمة الفعالة للتيار المار بهما هى 5A . فعين المعلومات الكاملة عن القدرة .

الجواب : $S_T = 175 + j75$ VA p.f. = 0.918 لاحق

٧ — ٢٤ معاوقتان $Z_1 = 5\angle{45^\circ}\ \Omega$ ، $Z_2 = 10\angle{30^\circ}\ \Omega$ متصلتان على التوالى فإذا كانت Q الكلية لهما لاحقة وتساوى 1920 var فأوجد متوسط القدرة P والقدرة الظاهرية S .

الجواب : $S = 3350$ VA ، $P = 2745$ W

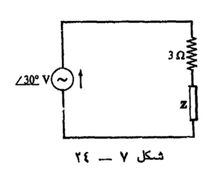
شكل ٧ — ٢٣

٧ — ٢٥ تأخذ دائرة التوالى الموضحة فى الشكل ٧ — ٢٣ 36.4 VA بعامل قدرة 0.856 لاحق ، عين Z فى هذه الدائرة .

الجواب : $Z = 1\angle{90^\circ}\ \Omega$

٧ — ٢٦ إذا كانت قدرة دائرة التوالى الموضحة فى الشكل ٧—٢٤ هى 300W وعامل القدرة لها 0.6 لاحق ، فعين بالكامل مثلث القدرة وكذلك المعاوقة المجهولة .

الجواب : $S = 300 + j400$ VA, $Z = 4\angle{90^\circ}\ \Omega$



شكل ٧ — ٢٤

٧ — ٢٧ معاوقتان $Z_1 = 4\angle{-30^\circ}\ \Omega$ ، $Z_2 = 5\angle{60^\circ}\ \Omega$ متصلتين على التوازى ويؤثر عليهما جهد مطاور $V = 20\angle{0^\circ}$ V . أوجد مثلث القدرة لكل فرع ثم اجمعهما لتحصل على مثلث القدرة الكلى.

الجواب : $Q = 19.3$ var لاحقة ، $P = 126.6$ W

p.f. = 0.99 لاحق

٧ — ٢٨ دائرة تتكون من $R = 10\ \Omega$ متصلة على التوازى مع $Z = 8\angle{-30^\circ}\ \Omega$. فإذا كانت القيمة الفعالة للتيار الكلى تساوى 5 A ، فأوجد بالكامل مثلث القــدرة .

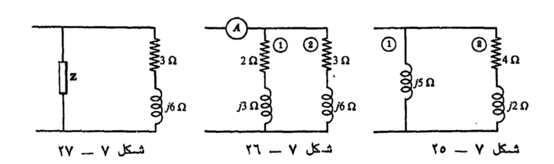
الجواب : $P = 110$ W ، $Q = 33$ var سابقة ، p.f. = 0.957 سابق .

٧ — ٢٩ إذا كان الفرع 1 فى دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٧—٢٥ يحتوى على 8 kvar ، فأوجد القدرة وعامل القدرة للدائرة كلها .

الجواب : 8 kw ، p. f. = 0.555 لاحق .

٧ — ٣٠ إذا كان الفرع 2 فى دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٧—٢٦ يحتوى على 1490 volt amperes ، فأوجد قراءة الاميتر ، عين المعلومات الكاملة عن القدرة .

الجواب : 42.4 A ، $S = 2210 + j3630$ VA ، p.f. = 0.521 لاحق



شكل ٧ — ٢٧   شكل ٧ — ٢٦   شكل ٧ — ٢٥

٧ — ٣١ فى دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٧–٢٧ ، كانت قدرة المقاومة $3\ \Omega$ هى 666 W فإذا كانت الدائرة كلها تأخذ 3370 VA بعامل قدرة 0.937 سابق ، فأوجد Z .

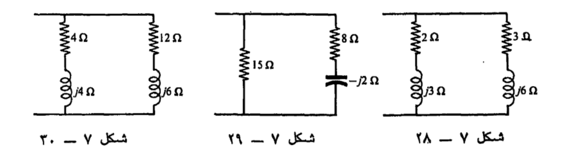
الجواب : $Z = 2 - j2\ \Omega$

٧ — ٣٢ إذا كانت دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٧–٢٨ لها قدرة كلية 1500 W ، فبين بالكامل مثلث القدرة .

الجواب : $S = 1500 + j2480$ VA ، p.f. = 0.518 لاحق

٧ — ٣٣ إذا كانت القدرة الكلية للدائرة الموضحة فى الشكل ٧–٢٩ هى 2000 W ، فأوجد القدرة فى كل مقاومة .

الجواب : $P_{15} = 724$ W, $P_8 = 1276$ W



شكل ٧ — ٣٠   شكل ٧ — ٢٩   شكل ٧ — ٢٨

٧ — ٣٤ إذا كانت Q الكلية لدائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٧–٣٠ لاحقة وتساوى 2500 var ، فبين بالكامل مثلث القدرة .

الجواب : p.f. = 0.771 لاحق و $S = 3920$ VA, $P = 3020$ W

٧ — ٣٥ أوجد عامل القدرة لدائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٧– ٣١ . إذا غيرت المقاومة $6\ \Omega$ ليصبح عامل القدرة 0.9 لاحق فأوجد قيمة المقاومة الجديدة .

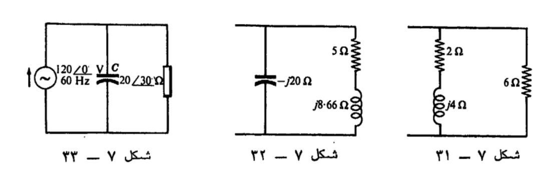
الجواب : p.f. = 0.8 لاحق ، $R = 3.22\ \Omega$.

٧ – ٣٦ إذا كان الحمل الأساسي للدائرة الموضحة في الشكل ٦ – ٣٢ هو $Z = 5 + j8.66\,\Omega$ ، فإذا أضيف له مكثف $20\,\Omega\,/\!-$ على التوازي وذلك لتحسين عامل القدرة ، فأوجد النسبة المئوية للنقص في التيار الكلي .

الجواب : $38\,\%$

٧ – ٣٧ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٧ – ٣٣ ، أوجد سعة المكثف C اللازمة لتصحيح عامل القدرة ليصبح 0.95 لاحق .

الجواب : $C = 28.9\,\mu F$



شكل ٧ — ٣٣ شكل ٧ — ٣٢ شكل ٧ — ٣١

٧ – ٣٨ مصدر جهد تردده 60 Hz وقيمته الفعالة 240V ، يغذي حملا بـ 4500VA بعامل قدرة 0.75 لاحق .
أوجد سعة المكثف اللازم توصيله على التوازي مع الحمل لتحسين عامل القدرة إلى (أ) 0.9 لاحق ، (ب) 0.9 سابق .

الجواب : (أ) $61.3\,\mu F$ ، (ب) $212\,\mu F$

٧ – ٣٩ في المسألة ٧ – ٣٨ أوجد النسبة المئوية للنقص في تيار الخط الناتج في الجزء (أ) . هل يوجد أي نقص آخر في تيار الجزء (ب) ؟

الجواب : 16.7% ، لا ، التيارات تظل كما هي .

٧ – ٤٠ ثلاث معاوقات $Z_1 = 20\angle 30°\,\Omega$ ، $Z_2 = 15\angle 45°\,\Omega$ ، $Z_3 = 10\angle 0°\,\Omega$ متصلة على التوازي ويؤثر عليهم مصدر جهد $V = 100\angle 45°\,V$. أوجد مثلث القدرة لكل فرع ثم اجمعهما لتحصل على مثلث القدرة الكلي .

الجواب : $P = 1904\,W$ ، $Q = 221\,var$ سابقة ، $S = 1920\,VA$, $p.f. = 0.993$ سابق .

٧ – ٤١ في المسألة ٧ – ٤٠ إذا كان مصدر الجهد $100\,V$ يغذي الأفرع الثلاثة في دائرة التوازي بـ $1920\,VA$ بعامل قدرة 0.993 سابق ، فاحسب التيار الكلي الذي تأخذه الدائرة .

الجواب : $19.2\,A$ سابق للجهد V بزاوية $6.62°$

٧ – ٤٢ مصدر جهد $V = 240\angle -30$ V يؤثر على ثلاث معاوقات $Z_1 = 25\angle 15$ Ω ، $Z_2 = 15\angle 60$ Ω ، $Z_3 = 15\angle 90$ Ω متصلة على التوازى . أوجد مثلث القدرة لكل فرع ثم اجمعهما لتحصل على مثلث القوى الكلى .

الجواب : $P = 4140$ W، $Q = 1115$ var لاحقه ، $S = 4290$ VA، p.f. = 0.967 لاحق .

٧ – ٤٣ أوجد مثلث القدرة الكلى للأحمال الثلاثة التالية : حمل ١ ، kW بعامل قدرة 0.8 لاحق . حمل ٢ ؛ Q,4 kVA له تساوى 2kvar سابقة ، حمل ٣ ؛ 6 KVA بعامل قدرة 0.9 لاحق .

الجواب : $P = 13.86$ kW، $Q = 4\ 38$ kvar لاحقه ، $S = 14.55$ kVA، p.f. = 0.965 لاحق .

٧ – ٤٤ أوجد مثلث القدرة الكلى للأحمال الثلاثة التالية : حمل ١ ؛ 200 VA بعامل قدرة 0.7 لاحق ، حمل ٢ ؛ 350 VA بعامل قدرة 0.5 لاحق ، حمل ٣ ؛ 275 VA بعامل قدرة يساوى الوحدة .

الجواب : $P = 590$ W، $Q = 446$ var لاحقة ، $S = 740$ VA، p.f. = 0.798 لاحق .

٧ – ٤٥ حمل 300 kW بعامل قدرة 0.65 لاحق يراد تحسين عامل القدرة له إلى 0.90 لاحق وذلك بإضافة مكثف على التوازى . احسب عدد الـ kVA المكثف المطلوب وكذلك النسبة المئوية فى النقص فى KVA الناتج .

الجواب : 204 kvar، 28% .

٧ – ٤٦ حمل صناعى 25 k VA عامل القدرة الكلى له 0.8 لاحق . وصل به مجموعة مقاومات وحدات تسخين (p.f. يساوى الوحدة) ، فوجد أن عامل القدرة للحقل الصناعى كله 0.85 لاحق احسب عدد kW التى تأخذها مقاومات التسخين .

الجواب : 4.3 kW .

٧ – ٤٧ حمل عبارة عن محرك حثى 1500 W بعامل قدرة 0.75 لاحق . وصل مع محركات متزامنة 500VA بعامل قدرة 0.65 سابق . احسب Kvat المكثفات اللازمة لتحسين عامل القدرة الكلى لمجموعتى المحركات إلى 0.95 لاحق . احسب كذلك النسبة المئوية للنقص فى VA الناتج .

الجواب : 347 var، 6.3% .

٧ – ٤٨ صحح عامل القدرة لحمل إلى 0.9 لاحق وذلك بإضافة مكثفات 20 kvar ، فإذا كان kVA النهائى هو 185، فأوجد مثلث القدرة للحمل قبل التصحيح .

الجواب : $P = 166.5$ kW، $Q = 101.0$ kvar لاحقه ، p.f. = 0.856 لاحق

٧ – ٤٩ وصل محرك حثى 2000VA بعامل قدرة 0.8 لاحق مع محركات تزامنية 500 VA ، فإذا كان عامل القدرة الكلى 0.90 لاحقاً ، فأوجد عامل القدرة للمحركات التزامنية .

الجواب : 0.92 سابق .

٧ – ٥٠ وصل حمل 65 kVA بعامل قدرة لاحق مع 25 k VA محركات تزامنية بعامل قدرة 0.6 سابق . فإذا كان عامل القدرة الكلي 0.85 لاحقاً ، فأوجد عامل القدرة للحمل 65 kVA .

الجواب : 0.585

٧ – ٥١ محول 100 k VA حمل إلى 80% من تحميله الكلي وكان عامل القدرة 0.85 لاحقاً . فإذا وصل به حمل عامل القدرة له 0.6 لاحق ، فأوجد عدد الـ kVA لهذا الحمل بشرط عدم زيادة معدل التحميل الكلي للمحول .

الجواب : 21.3. kVA

٧ – ٥٢ محول 250 kVA محمل تحميلا كلياً وعامل القدرة له 0.8 لاحق . فإذا أردنا تصحيح عامل القدرة إلى 0.9 لاحق وذلك بإضافة مكثفات على التوازي ، فاحسب (أ) عدد kvar للمكثفات المطلوبة ، (ب) عدد kw لحمل جديد عامل القدرة له يساوي الوحدة يمكن إضافته بشرط عدم زيادة معدل التحميل الكلي للمحول .

الجواب : 52.5 kvar ، 30.0 kW .

٧ – ٥٣ في المسألة ٧ – ٥٢ إذا وصلنا حملا جديداً عامل القدرة له 0.5 لاحق إلى المجموعة بعد توصيل المكثفات فاحسب عدد kVA لهذا الحمل الذي يمكن إضافتها مع عدم زيادة معدل kVA للمحول .

الجواب : 32kVA

الفصل الثامن

رنين التوالى والتوازى

مقدمة :

يقال عن دائرة إنها فى حالة رنين إذا كان الجهد المؤثر V والتيار الناتج I فى طور واحد . وعلى ذلك فإنه فى حالة الرنين تتكون المعاوقة المكافئة المركبة للدائرة من المقاومة R فقط .

وحيث أن V و I فى طور واحد فإن عامل القدرة لدائرة رنين يساوى الوحدة .

رنين التوالى :

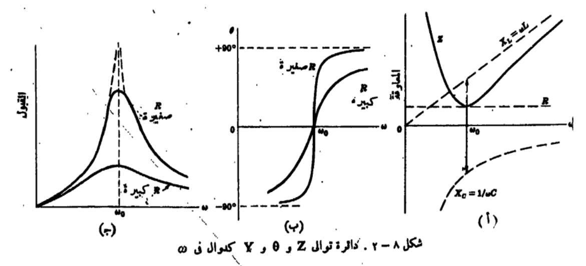
معاوقة الدائرة التى تتكون من RLC على التوالى والموضحة فى الشكل ٨ – ١ هى $\mathbf{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + jX$ وعلى ذلك فإن الدائرة تكون فى حالة رنين إذا كانت $X = 0$ ، أى عندما $\omega L = 1/\omega C$ أو $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$. وبما أن $\omega = 2\pi f$ فإن ذبذبة الرنين تعطى بالمعادلة .

R $j\omega L$ $-j/\omega C$

شكل ١ – ٨

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\ \text{Hz}$$

يوضح الشكل ٨–٢ (أ) تغير القيمة المطلقة لـ Z وكذلك مركباتها الثلاثة R و X_L و X_C كدوال فى ω . ونلاحظ أنه عندما $\omega = \omega_0$ فإن الممانعة الحثية تساوى الممانعة السعوية ، وبما أن $|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$ فإن $\mathbf{Z} = R$. وعلى ذلك فإن المعاوقة Z تكون أصغر ما يمكن عند الرنين ، بما أن $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$ فإن التيار يكون نهاية كبرى .



شكل ٨ – ٢ . دائرة توالى Z و θ و Y كدوال فى ω

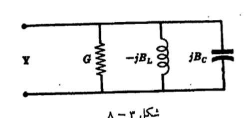
وعند ذبذبات أقل من ω_0 فإن الممانعة السعوية تكون أكبر من الممانعة الحثية ، ولهذا تكون زاوية المعاوقة سالبة . إذا كانت قيمة المقاومة صغيرة فإن الزاوية تتغير بسرعة أكبر مع الذبذبة كما هو موضح فى الشكل ٨ –٢ (ب) . وعندما تقترب ω من الصفر فإن زاوية المعاوقة تقترب من $-90°$.

وعند ذبذبات أكبر من ω_0 فإن الممانعة الحثية تكون أكبر من الممانعة السعوية ، ولهذا تكون زاوية المعاوقة موجبة وتقترب من $+90°$ عندما $\omega \gg \omega_0$.

يوضح الشكل ٨–٢ (ج) تغير مسامحة دائرة التوالى $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$ كدالة فى ω . وبما أن $\mathbf{I} = \mathbf{VY}$ فإن هذا الرسم يعطى أيضا دلالة على تغير التيار مع ω . وعلى ذلك فإن الشكل ٨ – ٢ (ج) يوضح أن التيار يصل إلى نهايته العظمى عند ω_0، وعندما تكون قيمة المقاومة صغيرة فإن قيمة التيار تكون كبيرة . ويوضح المنحنى النقطى الحالة النهائية عندما $R = 0$. وزاوية المسامحة (غير موضحة هنا) تساوى سالب زاوية المعاوقة الموضحة فى الشكل ٨ – ٢ (ب) .

رنين التوازى ، دائرة RLC نقية

تعرف دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨ – ٣ والتى تتكون من أفرع فى كل منها عنصر من العناصر R ، L ، C بأنها دائرة مثالية . وعلى ذلك فإن عمل هذه الدائرة من الأهمية فى موضوع الرنين عموما . ويمكن مقارنة دائرة التوازى المثالية هذه بدائرة التوالى السابق دراستها مما يوضح ازدواجية مشتركة بين الدائرتين .

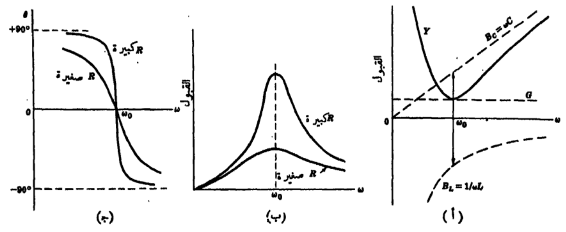


شكل ٨ – ٣

إن مسامحة العناصر الثلاثة هى $\mathbf{Y} = G + j(\omega C - 1/\omega L) = G + jB$ حيث $B_L = 1/\omega L$ ، $B_C = \omega C$ ، $B = B_C - B_L$ والدائرة فى حالة رنين عندما $B = 0$. أى عندما $\omega C = 1/\omega L$ أو $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$. وكما فى دائرة التوالى RLC فإن ذبذبة الرنين هى

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz}$$

ويوضح الشكل ٨ – ٤ (أ) تغير كل من القيمة المطلقة للمسامحة $\mathbf{Y}$ ومركباتها الثلاثة B_L ، B_C ، G كدوال فى الذبذبة ω وعند $\omega = \omega_0$ فإن التقبلية السعوية والحثية تكونان متساويتين و $\mathbf{Y} = G$. وعلى ذلك فعند الرنين تكون المسامحة نهاية صغرى ، وبما أن $\mathbf{I} = \mathbf{VY}$ فإن التيار يكون نهاية صغرى أيضا .



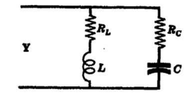
شكل ٨ ـ ٤ دائرة توازى Y ، Z و θ دوال فى ω

عند ذبذبة أقل من ω_0 تزيد التقبلية الحثية عن التقبلية السعوية وتكون زاوية $\mathbf{Y}$ سالبة . وعلى ذلك فإن زاوية المعاوقة تكون موجبة وتقترب من $+90°$ عندما تقترب ω من الصفر . أنظر الشكل ٨ ـ ٤ (جـ) .

وعند ذبذبة أكبر من ω_0 فإن زاوية $\mathbf{Z}$ تكون سالبة ويكون تغييرها كدالة فى ω أسرع عندما تكون قيمة R كبيرة .

رنين التوازى ، دائرة من فرعين

تكون المسامحة $\mathbf{Y}$ لدائرة التوازى المكونة من فرعين الموضحة فى الشكل ٨ ـ ٥ من مجموع مسامحة كل فرع على حدة .



شكل ٨ ـ ٥

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_C = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C}$$
$$= \left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2}\right) + j\left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}\right)$$

والدائرة تكون فى حالة رنين إذا كانت المسامحة المركبة عددا حقيقيا ، إذن $X_C/(R_C^2 + X_C^2) = X_L/(R_L^2 + X_L^2)$ ،

$$\frac{1}{\omega_0 C}(R_L^2 + \omega_0^2 L^2) = \omega_0 L(R_C^2 + 1/\omega_0^2 C^2) \qquad (١)$$

ويمكن تغيير أى من الكميات الخمس الموجودة فى المعادلة (١) للحصول على الرنين .

وبحل المعادلة (١) للحصول على ω_0 نجد أن

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}} \qquad (٢)$$

وعلى ذلك فإن ذبذبة الرنين ω_0 لدائرة توازى تتكون من فرعين تختلف عن مثيلتها فى دائرة التوازى التى تتكون من العناصر النقية R ، L و C على التوازى بالعامل .

$$\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

وحيث أن الذبذبة لابد وأن تكون عددا حقيقيا موجبا فإن يكون للدائرة ذبذبة رنين ω_0 عندما $R_L^2 > L/C$ و $R_C^2 > L/C$ أو $R_L^2 < L/C$ و $R_C^2 < L/C$. وعندما $R_L^2 = R_C^2 = L/C$ فإن الدائرة تكون فى حالة رنين عند جميع الذبذبات ، ولهذه الحالة الخاصة أنظر المسألة ٨ - ١٢ .

وبحل المعادلة (١) للحصول على L ، نجــد أن

$$L = \tfrac{1}{2}C\left[(R_C^2 + X_C^2) \pm \sqrt{(R_C^2 + X_C^2)^2 - 4R_L^2X_C^2}\right]$$

أو ، بما أن $Z_C = \sqrt{R_C^2 + X_C^2}$

$$L = \tfrac{1}{2}C\left[Z_C^2 \pm \sqrt{Z_C^4 - 4R_L^2X_C^2}\right] \qquad (٣)$$

والآن إذا كان فى المعادلة (٣) $Z_C^4 > 4R_L^2X_C^2$ فإننا نحصل على قيمتين لـ L تكون الدائرة عندهما فى حالة رنين . وإذا كان $Z_C^4 = 4R_L^2X_C^2$ فان الدائرة تكون فى حالة رنين عند $L = \tfrac{1}{2}CZ_C^2$ ، وعندما $Z_C^4 < 4R_L^2X_C^2$ فإنه لا توجد قيمة لـ L تجعل الدائرة فى حالة رنين .

وبحل المعادلة (١) للحصول على C ، نجــد أن

$$C = 2L\left[\frac{1}{Z_L^2 \pm \sqrt{Z_L^4 - 4R_C^2X_L^2}}\right] \qquad (٤)$$

وهنا إذا كان $Z_L^4 > 4R_C^2X_L^2$ ، فإننا نحصل على قيمتين لـ C تكون الدائرة عندهما فى حالة رنين .

وبحل المعادلة (١) للحصول على R_L ، نجــد أن

$$R_L = \sqrt{\omega^2LCR_C^2 - \omega^2L^2 + L/C} \qquad (٥)$$

وبالحل للحصول على R_C ، نجــد أن

$$R_C = \sqrt{R_L^2/(\omega^2LC) - 1/\omega^2C^2 + L/C} \qquad (٦)$$

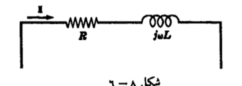
وإذا كان الجذر فى كل من المعادلتين (٥) ، (٦) موجبا فإننا نحصل على قيمة لكل من R_C ، R_L تكون عندها دائرة التوازى المكونة من فرعين فى حالة رنين .

عامل الجودة Q

يعرف عامل الجودة للملفات والمكثفات والدوائر بأنه

$$\text{عامل الجودة } Q = 2\pi \times \frac{\text{أكبر طاقة مخزونة}}{\text{الطاقة المستنفذة فى كل دورة}}$$

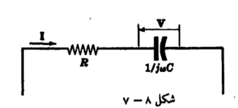
تعطى الطاقة المستنفذة فى الدورة للدائرة الموضحة فى الشكل ٨ – ٦ والشكل ٨ – ٧ بحاصل ضرب متوسط الطاقة فى المقاومة $(I_{max}/\sqrt{2})^2R$ وزمن الدورة T أو $1/f$.



شكل ٨ – ٦

وتعطى أكبر طاقة مخزونة فى دائرة التوالى RL الموضحة فى الشكل ٨ – ٦ بالقيمة $\frac{1}{2}LI^2_{max}$. إذن

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI^2_{max}}{(I^2_{max}/2)R(1/f)} = \frac{2\pi fL}{R} = \frac{\omega L}{R}$$



شكل ٨ – ٧

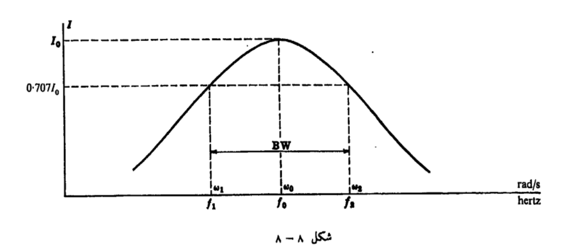
وتعطى أكبر طاقة فى دائرة التوالى RC الموضحة فى الشكل ٨ – ٧ . بالقيمة $\frac{1}{2}I^2_{max}/\omega^2C$ أو $\frac{1}{2}CV^2_{max}$. إذن

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}I^2_{max}/\omega^2C}{(I^2_{max}/2)R(1/f)} = \frac{1}{\omega CR}$$

والطاقة المخزونة فى دائرة RLC على التوالى عند الرنين ثابتة . وذلك لأنه عندما يكون جهد المكثف أكبر ما يمكن يكون تيار الملف مساويا للصفر والعكس بالعكس ، $\frac{1}{2}CV^2_{max} = \frac{1}{2}LI^2_{max}$. إذن

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

فى دائرة التوالى RLC نجد أن التيار دالة فى الذبذبة مشابهة لمنحنى المسامحة فى الشكل ٨ – ٢ (جـ) . وفى الشكل ٨ – ٨ رسم تيار دائرة RLC كدالة فى ω أو كدالة فى f وذلك مع تغيير مناسب فى المحور الأفقى . وعند ω_0 يصل التيار I_0 إلى قيمته العظمى . وقد وضح فى الرسم النقطة التى يكون عندها التيار مساويا 0.707 من قيمته العظمى ، والذبذبات المقابلة هى ω_1 و ω_2 .



شكل ٨ – ٨

وبما أن القدرة المعطاة للدائرة هى I^2R ، فعند $I = 0.707\,I_0$ تكون القدرة نصف قيمتها العظمى الناتجة عند ω_0 وتسمى النقطتان المقابلتان لـ ω_1 و ω_2 بنقطتى نصف القـــدرة وتسمى المسافة بين هاتين النقطتين مقدرة بوحـــدات hertz باتساع الشريط BW .

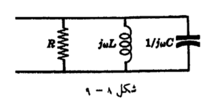
والآن يمكن التعبير عن عامل الجودة بالنسبة بين ذبذبة الرنين إلى اتساع الشريط ، إذن (أنظر المسألة ٨ – ١٣) .

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{\text{BW}}$$

وذبذبة الرنين ω_0 هى المتوسط الهندسى للذبذبتين ، ω_1 و ω_2 (أنظر المسألة ٨ – ٦)

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

تختزن دائرة التوازى المكونة من الأفرع الثلاثة والموضحة فى الشكل ٨ – ٩ عند الرنين كية ثابتة من الطاقة . وذلك لأنه إذا كان تيار الملف نهاية عظمى يكون جهد المكثف مساويا للصفر والعكس بالعكس



شكل ٨ – ٩

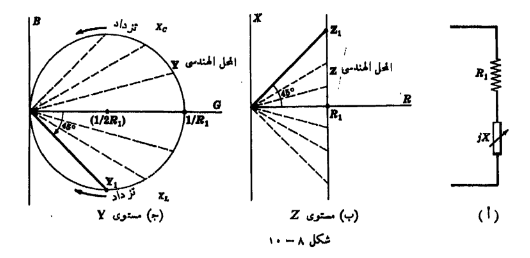
أى أن $\quad \frac{1}{2}LI_{max}^2 = \frac{1}{2}CV_{max}^2$

إذن $\quad Q_0 = \dfrac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$

أشكال المحل الهندسى :

يمكن تحليل الدوائر ذات العنصر الواحد باستخدام أشكال المحل الهندسى لسماحة الدائرة ، وحيث أن $I = VY$ ، V ثابت ، فإن المحل الهندسى للكمية Y يمثل تغير I مع تغير العنصر المتغير .

تتكون دائرة التوالى الموضحة فى الشكل ٨ — ١٠ (ا) من مقاومة ثابتة ومانعة متغيرة يمكن أن تأخذ قيما موجبة أو سالبة . وإذا اعتبرنا أن مستوى Z يتركب من مجموعة الأحداثيات الكرتيزية R ، X ، فإن المحل الهندسى للمعاوقة Z للدائرة المعطاة هو خط مستقيم يوازى المحور X ويقطع المحور R عند R_1 ، كما هو موضح فى الشكل ٨ — ١٠ (ب)



شكل ٨ — ١٠

ويمكننا تعيين المحل الهندسى لسماحة الدائرة المعطاة Y فى مستوى Y المتكون من مجموعة الاحداثيات الكرتيزية G ، B .

وبما أن $Z = 1/Y$

$$R_1 + jX = \frac{1}{G + jB} \qquad (١)$$

وبتجزء المعادلة (١) على شكل كسور ومساواة الأجزاء الحقيقية نجـد أن

$$R_1 = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

أو

$$G^2 - G/R_1 + B^2 = 0 \qquad (٢)$$

وباضافة $1/4R_1^2$ لكلا طرفى المعادلة (٢) ثم تبسيطها نجـد أن

$$\left(G - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R_1}\right)^2 \qquad (٣)$$

وبمقارنة الصيغة القياسية لمعادلة دائرة فى الهندسة التحليلية $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ بالمعادلة (٣) ، نلاحظ أن المحل الهندسى المستوى للكية Y هو عبارة عن دائرة مركزها عند $(1/2R_1, 0)$ ، ونصف قطرها $1/2R_1$.

كما هو موضح فى الشكل ٨ — ١٠ (جـ) .

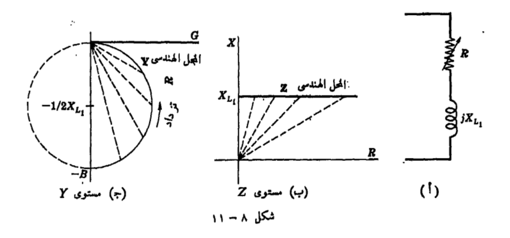
ويقابل كل نقطة فى المحل الهندسى للمعاوقة **Z** نقطة فى المحل الهندسى للمسامحة **Y** . ويقابل كل نقطة فى المحل الهندسى لـ **Z** فوق المحور R نقطة على نصف الدائرة تحت المحور G فى مستوى **Y** . وأيضا $\infty +$ على المحل الهندسى لـ **Z** تقابل نقطة الأصل فى مستوى **Y** . وبالمثل فإن أى نقطة تحت المحور R فى المحل الهندسى لـ **Z** يقابلها نقطة على النصف دائرة فوق المحور G فى مستوى **Y** . و $\infty -$ على المحل الهندسى لـ **Z** تقابل نقطة الأصل فى المستوى **Y** . وبملاحظة المواقع النسبية لـ Z_1 و Y_1 فإن بعدى Z_1 و Y_1 عن نقطة الأصل المقابلة مختلفان بينما تتساوى الزوايا على المحور الأفقى ولكن باشارة مختلفة .

بتثبيت الممانعة الحثية وتغيير المقاومة كما هو فى الشكل ٨ – ١١ (أ) يكون المحل الهندسى للمعاوقة **Z** عبارة عن خط مستقيم فى الربع الأول لمستوى **Z** عند X تساوى X_{L1} . وباستخدام نفس الطريقة السابقة تكون معادلة المحل الهندسى لـ Y هى

$$G^2 + (B - 1/2X_{C_1})^2 = (1/2X_{C_1})^2 \qquad (٤)$$

وبمقارنة المعادلة (٤) بالصيغة القياسية لمعادلة دائرة ، نجد أن المحل الهندسى لـ **Y** هو دائرة مركزها عند $(0, -1/2\,X_{L1})$ ونصف قطرها $1/2\,X_{L1}$ فى مستوى **Y** . أنظر الشكل ٨ – ١١ (جـ) .

وحيث أن المحل الهندسى لـ **Z** فى الشكل ٨ – ١١ (ب) يتكون من خط مستقيم فى الربع الأول فى المستوى **Z** فإن نصف الدائرة الواقع فى الربع الرابع فى مستوى **Y** هو فقط تحويل المحل الهندسى لـ **Z** لهذه الدائرة .

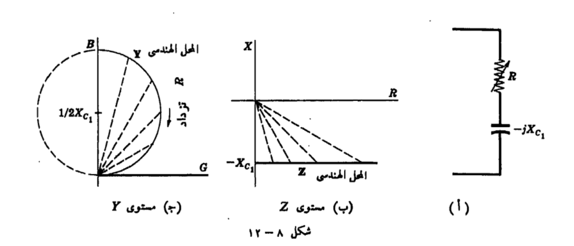


شكل ٨ – ١١

عند توصيل ممانعة سعوية على التوالى مع مقاومة متغيرة كما فى الشكل ٨ – ١٢ (أ) فإن المحل الهندسى لـ **Z** يكون خطا أفقيا فى الربع الرابع فى مستوى **Z** عند $X = -X_{C1}$. انظر الشكل ٨ – ١٢ (ب) . وباستخدام نفس الطريقة السابقة تكون معادلة المحل الهندسى لـ **Y** هى .

$$G^2 + (B + 1/2X_{L_1})^2 = (1/2X_{L_1})^2 \qquad (٥)$$

وبمقارنة المعادلة (٥) بالصيغة القياسية لمعادلة دائرة ، نرى أن المحل الهندسي لـ Y عبارة عن نصف دائرة مركزها عند ($1/2X_{C_1}$ و O) ونصف قطرها $1/2X_{C_1}$ فى الربع الرابع لمستوى Y . أنظر الشكل ٨ – ١٢ (جـ) .



(أ) (ب) مستوى Z (جـ) مستوى Y

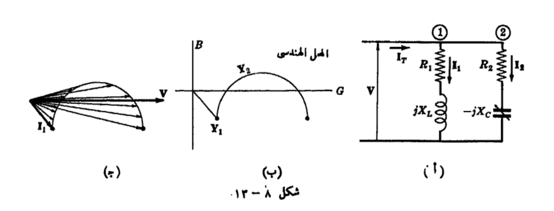
شكل ٨ – ١٢

اشكال المحل الهندسى للتيار :

أعتبر دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨ – ١٣ (أ) والتى تتكون من مقاومة ثابتة R_1 متصلة على التوالى مع ممانعة ثابتة jX_L فى الفرع الأول ومقاومة ثابتة R_2 متصلة على التوالى مع ممانعة متغيرة $-jX_C$ فى الفرع الثانى . وتكون المسامحة الكلية للفرعين المتصلين على التوازى هى

$$Y_T = Y_1 + Y_2$$

فى الشكل ٨ – ١٣ (ب) بإضافة المحل الهندسى للفرع الثانى ، Y_2 إلى النقطة الثابتة Y_1 نحصل على المحل الهندسى Y_T .



(أ) (ب) (جـ)

شكل ٨ – ١٣

وحيث أن التيار يعطى بـ $I = VY$ فإن الشكل ٨ – ١٣ (جـ) يبين أنه بإضافة التيار الثابت I_1 إلى القيم المختلفة التيار I_2 ينتج لدينا المحل الهندسى للتيار الكلى . و يوضح الشكل أيضا كيف أنه توجد قيمتان لـ C يكون عندهما التيار الكلى فى نفس اتجاه V .

وبإعادة اختبار الشكل ٨ – ١٣ (جـ) يتضح أنه تحت ظروف معينة فإنه من المحتمل ألا نجد قيمة لـ C يحدث عندها الرنين . فإذا نقص نصف قطر دائرة المحل الهندسى بطريقة ما بحيث لا يتقاطع المنحنى مع المحور V فإنه لا توجد قيمة لـ C يحدث عندها رنين . وفى المسائل التالية اختبارات لتطبيقات لأشكال المحل الهندسى .

مسائل محلولة

٨ – ١ فى دائرة RLC على التوالى $C = 12.5\,\mu F$ ، $L = 5\,mH$ ، $R = 10\,\Omega$ ارسم قيمة وزاوية المعاوقة كدالة فى ω مع تغير ω من $0.8\omega_0$ إلى $1.2\omega_0$.

نجد عند الرنين

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{(5 \times 10^{-3})(12.5 \times 10^{-6})} = 4000 \text{ rad/s}$$

$$X_{L0} = \omega_0 L = 4000(5 \times 10^{-3}) = 20 \text{ ohms}$$

$$X_{C0} = 1/\omega_0 C = 1/(4000 \times 12.5 \times 10^{-6}) = 20 \text{ ohms}$$

إذن

$$Z_0 = R + j(X_{L0} - X_{C0}) = 10 + j(20 - 20) = 10\angle 0^\circ \text{ ohms}$$

وبما أن $X_C = 1/\omega C$ ، $X_L = \omega L$ ، إذن $X_L/X_{L0} = \omega/\omega_0$ و $X_C/X_{C0} = \omega_0/\omega$. وعلى ذلك فإنه يمكن حساب قيم Z و X_C و X_L عند ذبذبات أخرى .

وفى الشكل ٨ – ١٤ (ا) دونت قيم الممانعات والمعاوقات ، ويوضح الشكل ٨ – ١٤ (ب) الرسم المطلوب .

ω (rad/s)	X_L (Ω)	X_C (Ω)	Z (Ω)	
3200	16	25	10 − j9	13·4/−42°
3600	18	22·2	10 − j4·2	10·8/−22·8°
4000	20	20	10	10/0°
4400	22	18·2	10 + j3·8	10·7/20·8°
4800	24	16·7	10 + j7·3	12·4/36·2°

(ا)

(ب)

شكل ٨ – ١٤

٨ – ٢ إذا أثر جهد $V = 100\angle 0^\circ$ V على دائرة التوالى الموضحة فى المسألة ٨ – ١ . فأوجد الجهد عبر كل عنصر عندما ω تساوى 4400 rad/s و 4000 و 3600 . ارسم شكل الجهد المطاور عندكل ذبذبة .

عنـد $\omega = 3600$ rad/s فإن $I = V/Z = (100\angle 0^\circ)/(10.8\angle -22.8^\circ) = 9.26\angle 22.8^\circ$ A إذن

$$V_R = 9.26\angle 22.8^\circ(10) = 92.6\angle 22.8^\circ \text{ V},\ V_L = 9.26\angle 22.8^\circ(18\angle 90^\circ) = 167\angle 112.8^\circ \text{ V},\ V_C = 206\angle -67.2^\circ \text{ V}$$

عنـد $\omega = 4000$ rad/s فإن $I = (100\angle 0^\circ)/(10\angle 0^\circ) = 10\angle 0^\circ$ A إذن

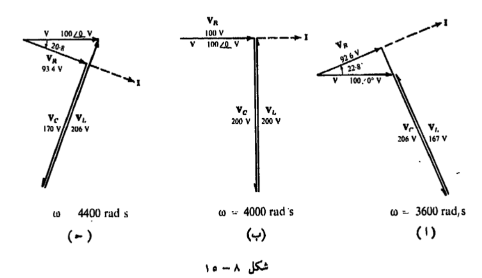
$$V_R = 100\angle 0^\circ \text{ V},\ V_L = 10\angle 0^\circ(20\angle 90^\circ) = 200\angle 90^\circ \text{ V},\ V_C = 200\angle -90^\circ \text{ V}$$

وعنـد $\omega = 4400$ rad/s فإن $I = (100\angle 0^\circ)/(10.7\angle 20.8^\circ) = 9.34\angle -20.8^\circ$ A إذن

$$V_R = 9.34\angle -20.8^\circ(10) = 93.4\angle -20.8^\circ \text{ V},\ V_L = 9.34\angle -20.8^\circ(22\angle 90^\circ) = 206\angle 69.2^\circ \text{ V},$$

$$V_C = 170\angle -110.8^\circ \text{ V}$$

ويوضح الشكل ٨ – ١٥ أشكال الجهود الثلاثة المطاورة . لاحظ أنه بالقرب من الرنين فإن قيمة الجهد عبر كل عنصر ممانع فى دائرة التوالى تزيد من قيمة الجهد المؤثر .



شكل ٨ – ١٥

٨ – ٣ دائرة توالى تتكون من $R = 5\,\Omega$ و $L = 20$ mH و سعة متغيرة C ، فإذا أثرنا عليها بجهد ذبذبته $f = 1000$Hz . فأوجد قيمة C عند الرنين .

بما أنه عند الرنين تكون الممانعات متساوية أى أن $2\pi fL = 1/2\pi fC$ إذن

$$C = \frac{1}{L(2\pi f)^2} = \frac{1}{(20 \times 10^{-3})(2\pi \times 1000)^2} = 1.27\ \mu\text{F}$$

٨ - ٤ دائرة توالى تتكون من $C = 20\ \mu F$ و $R = 5$ ohms وحث متغير L ، يؤثر عليها جهد $V = 10\angle 0^\circ$ V بذبذبة قدرها 1000 rad/s فإذا ضبطت قيمة L بحيث يصل الجهد عبر المقاومة إلى قيمته العظمى فأوجد الجهد عبر كل عنصر .

بما أن $V_R = IR$ فإن الجهد عبر المقاومة يصل إلى قيمته العظمى عند الرنين أى عندما يصل التيار إلى قيمته العظمى . وحيث أنه تتساوى الممانعات عند الرنين إذن .

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000(20 \times 10^{-6})} = 50 \text{ ohms}, X_L = 50 \text{ ohms}$$

و $Z = R = 5\angle 0^\circ\ \Omega$ وحيث أن $I = V/Z = (10\angle 0)/(5\angle 0^\circ) = 2\angle 0$ A إذن

$$V_C = 100\angle -90^\circ \text{ V} \text{ و } V_R = 2\angle 0(5) = 10\angle 0^\circ \text{ V}, V_L = (2\angle 0^\circ)(50\angle 90^\circ) = 100\angle 90^\circ \text{ V}$$

٨ - ٥ إذا أعطيت دائرة RLC على التوالى فيها $C = 40\ \mu F$ و $L = 0.5$ H و $R = 100\Omega$ ، فاحسب ذبذبة الرنين وكذلك ذبذبتى إتساع الشريط ω_1 و ω_2 (ذبذبتى منتصف القدرة)

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0.5(40 \times 10^{-6})} = 224 \text{ rad/s} \text{ و } f_0 = \omega_0/2\pi = 35.7 \text{ Hz.}$$

عند ذبذبة منتصف القدرة الصغرى ω_1 ، تزداد الممانعة السعوية عن الممانعة الحثية ويكون التيار مساويا لـ 0.707 من قيمته العظمى . وبما أن $I = V/Z$ إذن $|Z|$ يساوى 1.414 مرة من قيمته عند ω_0 . وبما أن $Z = 100\ \Omega$ عند ω_0 إذن $|Z| = 141.4$ ohms عند ω_1 . وحيث أن

$$Z = 100 - j(X_C - X_L) = 141.4/\theta \text{ و } \cos\theta = R/Z = 100/141.4 = 0.707 \text{ و } \theta = -45^\circ \text{ إذن}$$

$$X_C - X_L = R \quad \text{أو} \quad 1/\omega_1 C - \omega_1 L = R \qquad (١)$$

وبالتعويض فى المعادلة (١) بالقيم المعطاة وحلها للحصول على ω_1 نجد أن $\omega_1 = 145$ rad/s

و $f_1 = 145/2\pi = 23.1$ Hz

عند ذبذبة منتصف القدرة ω_2 ، تزداد الممانعة الحثية عن الممانعة السعوية وتكون $|Z|$ تساوى أيضا 141.4Ω و $\theta = +45^\circ$ إذن

$$X_L - X_C = R \quad \text{أو} \quad \omega_2 L - 1/\omega_2 C = R \qquad (٢)$$

وبالتعويض فى المعادلة (٢) وحلها للحصول على ω_2 نجد أن $\omega_2 = 345$ rad/s و $f_2 = 55$ Hz .

وحيث أن ω_0 هى المتوسط الهندسى للقيمتين ω_2 و ω_1 إذن

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = \sqrt{145 \times 345} = 224 \text{ rad/s}$$

٨ – ٦ بين أن ذبذبة الرنين ω_0 لدائرة RLC على التوالى هى المتوسط الهندسى لـ ω_1 و ω_2 أى المتوسط الهندسى للحد الأدنى والأعلى لذبذبة منتصف القدرة على الترتيب .

من المسألة ٨ – ٥ نجد أنه عند ω_1 ، $1/\omega_1 C - \omega_1 L = R$ at ω_1 وعنـــد ω_2 ، $\omega_2 L - 1/\omega_2 C = R$ إذن

$$1/\omega_1 C - \omega_1 L = \omega_2 L - 1/\omega_2 C \quad (١)$$

بضرب المعادلة (١) فى C والتعويض عن $\omega_0^2 = 1/LC$ نجـــد أن

$$1/\omega_1 - \omega_1/\omega_0^2 = \omega_2/\omega_0^2 - 1/\omega_2 \quad \text{أو} \quad 1/\omega_1 + 1/\omega_2 = (\omega_1 + \omega_2)/\omega_0^2$$

ومنها نجـــد أن $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

٨ – ٧ دائرة توالى فيها $C = 20\mu F$ و $L = 0.05\,H$ و $R = 50\,\Omega$ ، يؤثر عليها جهد $V = 100\angle 0^\circ\,V$ بذبذبة متغيرة . أوجد أقصى جهد على الملف مع تغير الذبذبة .

إن قيمة المعاوقة كدالة فى ω هى $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ ، إذن قيمة التيار هى $I = V/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$. قيمة الجهد عبر L هى

$$V_L = \omega L I = \omega L V/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (١)$$

وبوضع المشتقة $dV_L/d\omega$ فى المعادلة (١) مساوية للصفر ثم بالحل للحصول على ω ، نحصل على قيمة ω عندما يصل V_L إلى نهايته العظمى .

$$\frac{dV_L}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\omega L V(R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-1/2}$$
$$= \frac{(R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{1/2} LV - \omega L V \frac{1}{2}(R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-1/2}(2\omega L^2 - 2/\omega^3 C^2)}{R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2} \quad (٢)$$

وبتجزىء $LV(R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-1/2}$ فى المعادلة (٢) مع وضع البسط مساوياً للصفر نجد أن

$$R^2 - 2L/C + 2/\omega^2 C^2 = 0$$

ومنها نجد أن

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2 C^2}} = 1/\sqrt{LC}\sqrt{\frac{2}{2 - R^2 C/L}} \quad (٣)$$

وحيث أن $Q_0 = \omega_0 L/R = 1/\omega_0 CR,\ Q_0^2 = L/R^2 C$ بالتعويض عنها فى المعادلة (٣) نجد أن

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1}} \quad (٤)$$

وبالتعويض فى المعادلة (٣) بالقيم المعطاة نجد أن

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{2(\cdot 05)(20\times10^{-6}) - (50\times20\times10^{-6})^2}} = 1414 \text{ rad/s}$$

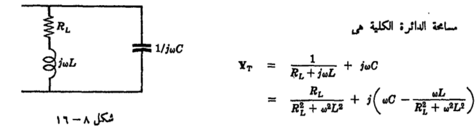
وبما أن $X_L = \omega L = 1414(0{\cdot}05) = 70{\cdot}7$ ohms و $1/\omega C = 1/(1414 \times 20 \times 10^{-6}) = 35{\cdot}4$ ohms

و $Z = 50 + j(70{\cdot}7 - 35{\cdot}4) = 50 + j35{\cdot}4 = 61{\cdot}2\angle 35{\cdot}3\ \Omega$ ، إذن $I = V/Z = 100/61{\cdot}2 = 1{\cdot}635$ A

و $V_{L(max)} = 1{\cdot}635(70{\cdot}7) = 115{\cdot}5$ V

توضح المعادلة (٤) أنه عندما تكون قيمة Q كبيرة فإن أكبر قيمة للجهد عبر L تكون عند $1/\sqrt{LC} \approx \omega_0$. وإذا كانت Q كبيرة فإننا نحصل أيضاً على أكبر قيمة للجهد عبر كل من R و C عند ω_0 . وعندما تكون Q صغيرة فإن أكبر قيمة لـ V_C تحدث عند ω أقل من ω_0 بينما أكبر قيمة لـ V_L تحدث عند ω أكبر من ω_0 . أنظر المسألة ٨ – ٢٨ .

٨ – الشكل ٨ – ١٦ يوضح دائرة توازى يتصل فيها مكثف مع ملف حيث R_L هى مقاومة الملف . أوجد ذبذبة الرنين لهذه الدائرة .



شكل ٨ – ١٦

مسامحة الدائرة الكلية هى

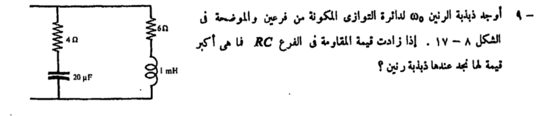
$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C$$
$$= \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

وعند الرنين يكون الجزء التخيلى مساوياً للصفر أو

$$\frac{\omega_0 L}{R_L^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C \quad \text{ومنها} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}}$$

وإذا كانت مقاومة الملف صغيرة بالمقارنة بـ $\omega_0 L$ فإن ذبذبة الرنين تعطى بـ $1/\sqrt{LC}$.

٩ – أوجد ذبذبة الرنين ω_0 لدائرة التوازى المكونة من فرعين والموضحة فى الشكل ٨ – ١٧ . إذا زادت قيمة المقاومة فى الفرع RC فما هى أكبر قيمة لها نجد عندها ذبذبة رنين ؟



شكل ٨ – ١٧

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 20 \times 10^{-6}}}\sqrt{\frac{6^2 - 10^{-3}/(20 \times 10^{-6})}{4^2 - 10^{-3}/(20 \times 10^{-6})}}$$

$$= 4540 \text{ rad/s}$$

إن قيمة بسط المقدار الجذرى هى $36 - 50 = -14$. إذن يكون المقدار الجذرى جذر حقيقى إذا كان المقام سالباً أى أنه إذا كان $R_C^2 < L/C$ أو $R_C < 7.07\ \Omega$ وعندما تقترب قيمة R_C من $7.07\ \Omega$ فإن الذبذبة ω_0 تقترب من ما لا نهاية .

إذا زادت قيمة R_L فإن ω_0 تقترب من الصفر عندما تقترب R_L من $7.07\ \Omega$.

٨ – ١٠ أوجد قيمة L التى تكون عندها الدائرة الموضحة فى الشكل ٨ – ١٨ فى حالة رنين عند ذبذبة $\omega = 5000$ rad/s

المسامحة الكلية للدائرة هى،

$$Y = \frac{1}{2 + jX_L} + \frac{1}{5 - j10} \text{ siemens}$$

$$= \left(\frac{2}{4 + X_L^2} + \frac{5}{125}\right) + j\left(\frac{10}{125} - \frac{X_L}{4 + X_L^2}\right)$$

شكل ٨ – ١٨

وبوضع الجزء التخيلى مساوياً للصفر نجد أن

$10/125 = X_L/(4 + X_L^2)$ أو $X_L^2 - 12.5X_L + 4 = 0$ (١)

وجذرا المعادلة (١) هما $X_L = 12.17\ \Omega$ و $X_L = 0.33\ \Omega$

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة $X_L = \omega L$ نجد أن شرط رنين الدائرة هو $L = 2.43$ mH أو 0.066 mH .

٨ – ١١ أوجد قيمة C التى يحدث عندها رنين فى الدائرة الموضحة فى الشكل ٨ – ١٩ عندما $\omega = 5000$ rad/s

$$Y = \frac{1}{8 + j6} + \frac{1}{8.34 - jX_C} \text{ siemens}$$

$$= \left(\frac{8}{100} + \frac{8.34}{69.5 + X_C^2}\right) + j\left(\frac{X_C}{69.5 + X_C^2} - \frac{6}{100}\right)$$

شكل ٨ – ١٩

عند الرنين تكون المسامحة المركبة عدداً حقيقياً . إذن

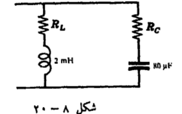
$$X_C/(69.5 + X_C^2) = 6/100 \quad \text{و} \quad X_C^2 - 16.7X_C + 69.5 = 0$$

ومنها نجد أن $X_C = 8.35\ \Omega$ وبالتعويض عن هذه القيمة فى $X_C = 1/\omega C$ وحلها ، نجد أن $C = 24\mu F$.

٨ – ١٢ عين قيم R_L و R_C التى تجعل الدائرة الموضحة فى الشكل ٨ – ٢٠ فى حالة رنين عند كل الذبذبات .

الدائرة فى حالة رنين عند ذبذبة

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$



شكل ٨ – ٢٠

إن ω_0 تأخذ أى قيمة إذا كان $R_L^2 = R_C^2 = L/C$. إذا كان $L/C = (2 \times 10^{-3})/(80 \times 10^{-6})$ إذن

$$R_L = R_C = \sqrt{25} = 5 \text{ ohms}$$

يترك الطالب اختبار هذه النتيجة عند قيم $\omega = 2500$ rad/s و $\omega = 5000$ rad/s

٨ – ١٣ بين أن $Q_0 = \omega_0 L/R = f_0/BW$ لدائرة RLC على التوالى .

عند ذبذبات منتصف القدرة تكون محصلة الممانعة مساوية للمقاومة .

وعند ذبذبة منتصف القدرة الصغرى تكون الممانعة السعوية أكبر من الممانعة الحثية . إذن

$$1/2\pi f_1 C - 2\pi f_1 L = R \quad \text{ومنها نجد أن} \quad f_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L}$$

وعند ذبذبة منتصف القدرة الكبرى تكون الممانعة الحثية أكبر من الممانعة السعوية إذن

$$2\pi f_2 L - 1/2\pi f_2 C = R \quad \text{ومنها نجد أن} \quad f_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L}$$

وبما أن $BW = f_2 - f_1$, $BW = R/2\pi L$. إذن

$$Q_0 = f_0/BW = 2\pi f_0 L/R = \omega_0 L/R$$

٨ – ١٤ احسب Q_0 لدائرة التوالى التى فيها $R = 20\,\Omega$ و $L = 0.05$ H و $C = 1\,\mu$F وذلك باستخدام الصيغ الثلاثة المكافئة لـ Q_0 : $\omega_0 L/R$ و $1/\omega_0 CR$ و f_0/BW .

ذبذبة الرنين هى $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0{\cdot}05 \times 10^{-6}} = 4470$ rad/s و $f_0 = \omega_0/2\pi = 712$ Hz. إذن

$$Q_0 = \omega_0 L/R = 4470(0{\cdot}05)/20 = 11{\cdot}2$$

أو

$$Q_0 = 1/\omega_0 CR = 1/(4470 \times 10^{-6} \times 20) = 11{\cdot}2$$

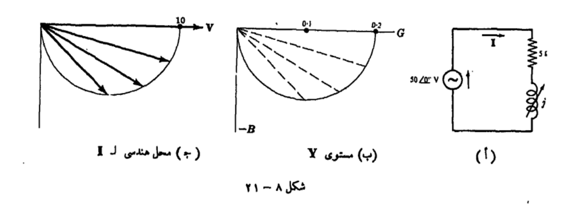
من المسألة ٨ – ١٣ نجد عند الذبذبة الصغرى لمنتصف القدرة أن $1/2\pi f_1 C - 2\pi f_1 L = R.$ وبالتعويض

$1/(2\pi f_1 \times 10^{-6}) - 2\pi f_1(0{\cdot}05) = 20$ و $f_1 = 681$ Hz

وعند الذبذبة الكبرى لمنتصف القدرة نجد أن $2\pi f_2 L - 1/2\pi f_2 C = R.$. وبالتعويض نجد أن $f_2 + 745$ Hz

إذن BW = (745 – 681) Hz و $Q_0 = f_0/\text{BW} = 712/(745 - 681) = 11{\cdot}1$

٨ – ١٥ أوجد المحل الهندسى للتيار فى الدائرة المبينة فى الشكل ٨ – ٢١ (أ) والتى فيها ممانعة حثية متغيرة X_L .
المحل الهندسى لـ **Y** هو نصف دائرة نصف قطرها $r = 1/2R = 0.1$ كما هو موضح فى الشكل ٨ – ٢١ (ب)



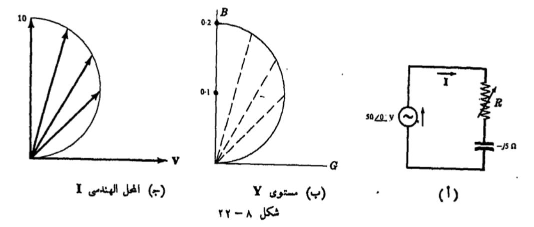
(أ) (ب) مستوى **Y** (جـ) محل هندسى لـ **I**

شكل ٨ – ٢١

وحيث أن المحل الهندسى التيار يوجد من العلاقة **I = VY** حيث **V** = 50 /0° V إذن المحل الهندسى التيار مشابهة للمحل الهندسى لـ **Y** وله قيمة عظمى تساوى 10 A عندما $X_L = 0$. أنظر الشكل ٨ – ٢١ (جـ)

٨ – ١٦ أوجد المحل الهندسى للتيار فى الدائرة الموضحة فى الشكل ٨–٢٢ (ا) والتى فيها مقاومة متغيرة R وممانعة سعوية ثابتة .

المحل الهندسى لـ $\mathbf{Y}$ هو نصف دائرة نصف قطرها $r = 1/2X_C = 0.1$ كما هو موضح فى الشكل ٨ – ٢٢ (ب).



(أ)　　　(ب) مستوى $\mathbf{Y}$　　　(جـ) المحل الهندسى $\mathbf{I}$

شكل ٨ – ٢٢

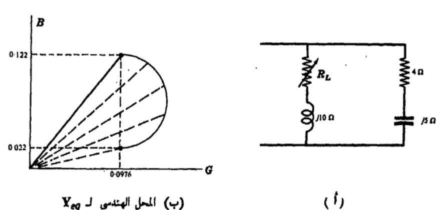
وحيث أن المحل الهندسى للتيار I يوجد من المعادلة $\mathbf{I} = \mathbf{VY}$ حيث $\mathbf{V} = 50\,\underline{/0^\circ}\ \mathrm{V}$. إذن يصل التيار إلى قيمته العظمى $10\ \mathrm{A}$ عندما $R = 0$. أنظر الشكل ٨ – ٢٢ (جـ) .

٨ – ١٧ أوجد قيمة R_L التى تجعل الدائرة الموضحة فى الشكل ٨ – ٢٣ (أ) فى حالة رنين . ارسم المحل الهندسى لـ $\mathbf{Y}$. ثم فسر النتائج التى تحصل عليها .

المسامحة الكلية للدائرة هى

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{R_L + j10} + \frac{1}{4 - j5} = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + 100} + \frac{4}{41}\right) + j\left(\frac{5}{41} - \frac{10}{R_L^2 + 100}\right) \text{ siemens}$$

وحيث أنه عند الرنين يكون الجزء التخيل لـ $\mathbf{Y}$ مساويا للصفر أى أن 5/4('4+110)(R_L^2 + 100)
ومنها نجـــد أن $\mathrm{R}^2{}_L = -18$. أى أنه لاتوجد قيمة لـ R_L تجعل الدائرة فى حالة رنين .



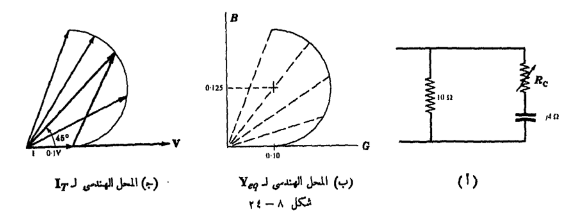
(أ)　　　(ب) المحل الهندسى لـ $\mathbf{Y}_{eq}$

شكل ٨ – ٢٣

إن المسامحة للفرع ذى العناصر الثابتة هى $1/(4 - j5) = 0{\cdot}0976 + j0{\cdot}122$ S ، المحل الهندسى لمسامحة الفرع ذى العناصر المتغيرة هو نصف دائرة نصف قطرها $r = 1/2X_L = 1/20 = 0{\cdot}05$ أى أن القطر يساوى 0.10 وحيث أن الموصلة السعوية للفرع ذى العناصر الثابتة تساوى $0.122\ S$ فإن المحل الهندسى للفرع ذى العناصر المتغيرة لا يقطع المحور الحقيقى . وبذلك لايمكن أن يحدث رنين .

٨ – ١٨ أوجد المحل الهندسى لتيار الدائرة الموضحة فى الشكل ٨– ٢٤ (أ) ثم أوجد قيمة R_C التى تجعل زاوية الطور بين V و **I** تساوى °45 .

إن مسامحة الفرى ذى العناصر الثابتة هى $1/R = 0.1$ S . والمحل الهندسى النصف دائرة للفرع RC نصف قطره $r = \frac{1}{2} X_C = 1/8 = 0.125$. أنظر الشكل ٨–٢٤ (ب) .



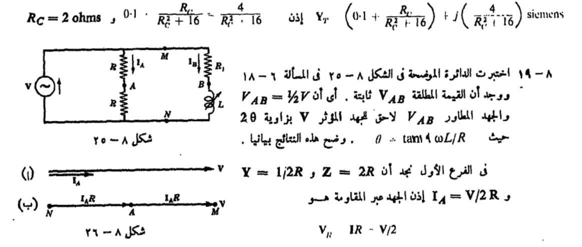
(جـ) المحل الهندسى لـ $\mathbf{I}_T$ (ب) المحل الهندسى لـ $\mathbf{Y}_{eq}$ (أ)

شكل ٨ – ٢٤

من الشكل ٨ – ٢٤ (جـ) نجد أن التيار سابق للجهد بزاوية °45 عند النقطة الموضحة . ومن هذا ينتج أن الجزء الحقيقى والجزء التخيلى لـ $\mathbf{Y}_T$ متساويان . وإذا كان

$$\mathbf{Y}_T = \left(0{\cdot}1 + \frac{R_C}{R_C^2 + 16}\right) + j\left(\frac{4}{R_C^2 + 16}\right) \text{ siemens}$$

إذن $0{\cdot}1 + \frac{R_C}{R_C^2 + 16} = \frac{4}{R_C^2 + 16}$ و $R_C = 2$ ohms



شكل ٨ – ٢٥

٨ – ١٩ اختبرت الدائرة الموضحة فى الشكل ٨ – ٢٥ فى المسألة ٦ – ١٨ ووجد أن القيمة المطلقة V_{AB} ثابتة . أى أن $V_{AB} = \frac{1}{2}V$ والجهد المطاور V_{AB} لاحق للجهد المؤثر **V** بزاوية 2θ حيث $\theta = \tan^{-1} \omega L/R$. وضح هذه النتائج بيانيا .

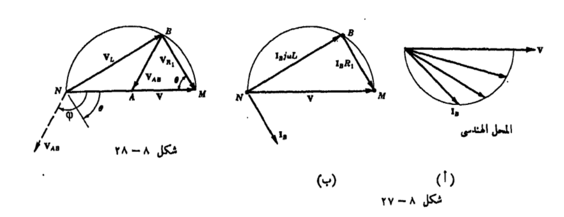
فى الفرع الأول نجد أن $Z = 2R$ و $Y = 1/2R$ و $I_A = V/2R$ إذن الجهد عبر المقاومة هـو

$$V_R = IR = V/2$$

شكل ٨ – ٢٦

الشكل ٨–٢٦ يوضح الشكل المطاور للجهدين $\mathbf{V}_{AN}$ و $\mathbf{V}_{MA}$ حيث A منتصف **V** .

حيث أن المحل الهندسى لمسامحة الفرع الثانى Y نصف دائرة ، اذن المحل الهندسى للتيار هو أيضا نصف دائرة كما هو موضح فى الشكل ٨ – ٢٧ (ا) . ويتكون شكل الجهد المطاور من الجهد عبر الحث ، V_{BN} والجهد عبر R ، V_{MB} . وبإضافة الجهدين ينتج الجهد V . لاحظ أن I_B لاحق لـ V_{BN} بزاوية 90° .



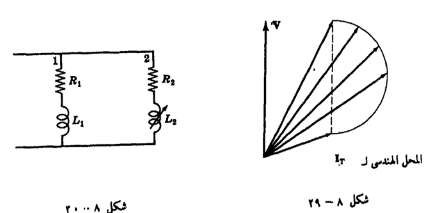
شكل ٨ – ٢٨

(ب) (أ)
شكل ٨ – ٢٧

الجهدان V_{BN} و V_{MB} متعامدان لجميع قيم L . وعندما تتغير L من صفر إلى ∞ تتحرك B من M إلى N على المحل الهندسى النصف دائرى .

والآن بتركيب الجهدين المطاورين فى الشكلين ٨ – ٢٦ (ب) ، ٨ – ٢٧ (ب) كما فى الشكل ٨ – ٢٨ نرى أن V_{AB} هو نصف قطر النصف دائرة ويساوى $\frac{1}{2}V$ أى أنه ثابت القيمة . وعلاوة على ذلك فإن V_{AB} لاحق الجهد بزاوية φ تساوى 2θ حيث $\theta = \tan^{-1}\omega L/R$

٨ – ٢٠ الشكل ٨–٢٩ يوضح المحل الهندسى للتيار الكلى لدائرة توازى مكونة من فرعين ، عين عناصر كل فرع ووضح أى العناصر يمكن تغييره .



شكل ٨ – ٢٩

شكل ٨ – ٢٠

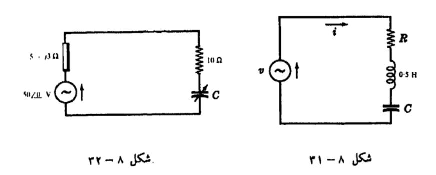
النقطة فى قاع النصف دائرة تقابل الشرط الذى عنده يكون تيار الفرع ذى العناصر المتغيرة مساويا للصفر. وعلى ذلك فإن التيار الكلى عند نفس النقطة ينتج من تيار الفرع 1 ذى العناصر الثابتة . وحيث أن هذا التيار لاحق للجهد إذن الفرع الثابت لابد أن يحتوى على R_1 و L_1 .

المحل الهندسى النصف دائرى لتيار الفرع 2 يبين أن التيار فى اتجاه الجهد عند قيمته العظمى . وعند جميع النقط الأخرى فى المحل الهندسى يكون $\mathbf{I_2}$ لاحق لـ $\mathbf{V}$. إذن الفرع 2 يتكون من R_2 و L_2 بحث متغير كما هو موضح فى الشكل ٨ –٣٠ .

مسائل اضافية

٨ – ٢١ فى دائرة التوالى RLC الموضحة فى الشكل ٨ – ٣١ إذا كانا الجهد والتيار اللحظين يعطيان بالمعادلتين $v = 70{\cdot}7 \sin (500t + 30^\circ)$ volts و $i = 2{\cdot}83 \sin (500t + 30^\circ)$ amperes ، فأوجـــد R و C .

الجواب : $R = 25\ \Omega$ و $C = 8\ \mu F$



شكل ٨ – ٣٢   شكل ٨ – ٣١

٨ – ٢٢ فى دائرة التوالى الموضحة فى الشكل ٨–٣٢ إذا كانت المعاوقة للمصدر هى $5 + j3\ \Omega$ وذبذبة المصدر هى 2000 Hz ، فعند أى قيمة لـ C تصل القدرة فى المقاومة $10\ \Omega$ إلى قيمتها العظمى ؟

الجواب : $C = 26{\cdot}6\ \mu F, P = 111\ W$

٨ – ٢٣ فى دائرة توالى RLC فيها $L = 25\ mH$ و $C = 75 \mu F$ كانت زاوية الطور لها لاحقة وتساوى 25° عند $\omega = 2000$ rad/s . عند أى ذبذبة تكون زاوية الطور سابقة وتساوى 25° ؟ أوجد أيضا ω_0 .

الجواب : $\omega = 267$ rad/s, $\omega_0 = 730$ rad/s

٨ – ٢٤ إذا كان الجهد اللحظى لدائرة التوالى RLC والتى فيها $L = 0.5 H$ هو $v = 70{\cdot}7 \sin (500 + 30^\circ)$ volts . والتيار اللحظى هو $1{\cdot}5 \sin (500t)$ amperes. . فأوجد قيمة R و C . عند أى ذبذبة ω_0 تكون الدائرة فى حالة رنين ؟ الجواب : $R = 40{\cdot}8$ ohms, $C = 8{\cdot}83\ \mu F$, $\omega_0 = 476$ rad/s

٨ – ٢٥ دائرة توالى فيها $R = 10\,\Omega$ و $L = 0.2$ H و $C = 40\mu F$ يؤثر عليها جهد ذبذبته متغيرة ، أوجد الذبذبات f_1 و f_0 و f_2 التى يكون عندها التيار : سابق الجهد بزاوية 30° ، فى اتجاه الجهد ، لاحق الجهد بزاوية 30° على الترتيب .

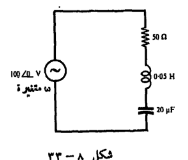
الجواب : $f_1 = 54{\cdot}0$ Hz, $f_0 = 56{\cdot}3$ Hz, $f_2 = 58{\cdot}6$ Hz

٨ – ٢٦ دائرة RLC على التوالى فيها $R = 25\,\Omega$ و $L = 0.6\,H$ زاوية الطور لها سابقة وتساوى 60° عند ذبذبة تساوى 40Hz . أوجد الذبذبة التى تكون عندها الدائرة فى حالة رنين .

الجواب : $f_0 = 45.4\,Hz$

٨ – ٢٧ فى دائرة التوالى الموضحة فى الشكل ٨ – ٣٣ غيرت الذبذبة حتى وصل الجهد عبر المكثف إلى قيمته العظمى ، فإذا كانت القيمة الفعالة للجهد المؤثر 100 volts ، فأوجد أكبر قيمة للجهد على المكثف والذبذبة التى تحدث عندها .

الجواب : $\omega = 707$ rad/s, $V_C = 115{\cdot}5$ V



شكل ٨ – ٣٣

٨ – ٢٨ إذا كان عامل الجودة لدائرة التوالى الموضحة فى المسألة ٨ – ٢٧ هو $Q_0 \quad \omega_0 L/R$. فإذا كانت Q_0 تساوى 5 عندما $R = 10\Omega$ فأوجد الذبذبة التى يصل عندها الجهد عبر المكثف إلى قيمته العظمى .

كرر نفس الشئ عندما $R = 5\,\Omega$

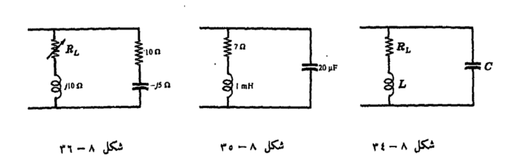
الجواب : $\omega = 990$ rad/s و 998 rad/s

ملحوظة : عندما $Q_0 > 10$ فإنه يمكن الفرض بأن الجهود عبر R و L و C تصل إلى قيمتها العظمى عند ذبذبة الرنين ω_0 أو f_0 .

٨ – ٢٩ لتوضيح تأثير Q على قيمة التيار بالقرب من ذبذبة الرنين ، ارسم القيمة المطلقة لـ Y مع ω للدائرتين بالثوابت التالية . الدائرة الأولى $R = 5\,\Omega$ و $L = 0.05$ H و $C = 20\mu F$. الدائرة الثانية : $R = 10\,\Omega$ و $L = 0.05$ H و $C = 20\,\mu$F .

٨ – ٣٠ فى دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨ – ٣٤ ، إذا كانت $L = 0.2$ H و $C = 30\,\mu$F . فعين ذبذبة الرنين عندما $R_L = 0$ ثم قارنها بذبذبة الرنين عندما $R = 50\,\Omega$.

الجواب : $\omega_0 = 408$ rad/s, $\omega_0 = 323$ rad/s



شكل ٨ – ٣٦ شكل ٨ – ٣٥ شكل ٨ – ٣٤

٨ – ٣١ أوجد ذبذبة الرنين f_0 لدائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨ – ٣٥ .

الجواب : $f_0 = 159$ Hz .

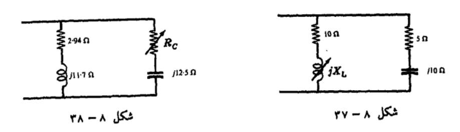
٨ – ٣٢ فى المسألة ٨–٣١ ، أوجد قيمة المقاومة التى يجب توصيلها على التوالى مع المكثف حتى تصبح ذبذبة الرنين 300 Hz .

الجواب : $R_C = 6\,\Omega$

٨ – ٣٣ أوجد قيمة R_L التى تجعل دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨–٣٦ فى حالة رنين .

الجواب : $R_L = 12.25\,\Omega$.

٨ – ٣٤ عند أية قيمة لـ X_L تكون دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨ – ٣٧ فى حالة رنين ؟ بين المحل الهندسى لـ Y لتوضيح النتائج .



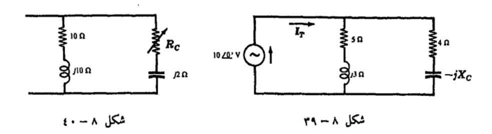
شكل ٨ – ٣٨ شكل ٨ – ٣٧

٨ – ٣٥ أوجد قيمة R_C التى تجعل دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨–٣٨ فى حالة رنين . بين المحل الهندسى لـ Y لتوضيح هذه النتيجة .

الجواب : $R_C = 0$

٨ – ٣٦ تكون دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨–٣٩ فى حالة رنين عندما $X_C = 9.68\Omega$ وعندما $X_C = 1.65\Omega$. أوجد التيار المطاور الكلى لكل قيمة من قيم المعاوقة السعوية .

الجواب : $1.83\angle 0°$ A, $3.61\angle 0°$ A



شكل ٨ — ٤٠ شكل ٨ — ٣٩

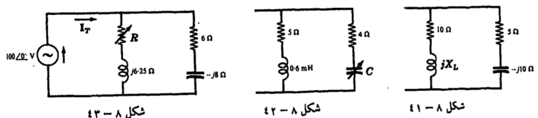
٨ — ٣٧ عند أية قيمة لـ R_C تكون دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨—٤٠ فى حالة رنين ؟

الجواب : $R_C = 6\,\Omega$.

٨ — ٣٨ يؤثر جهد $V = 50\angle 0°\,V$ على دائرة توالى تتكون من ممانعة حثية ثابتة $X_L = 5\,\Omega$ ومقاومة متغيرة . ارسم المحل الهندسى لمسامحة وتيار هذه الدائرة .

٨ — ٣٩ يؤثر جهد $V = 50\angle 0°\,V$ على دائرة توالى تتكون من مقاومة ثابتة $R = 5\,\Omega$ وسعة متغيرة C . ارسم المحل الهندسى لمسامحة وتيار هذه الدائرة .

٨ — ٤٠ فى دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨—٤١ الحث بدون حدود . ارسم المحل الهندسى لمسامحة الدائرة لتبين أنه لايمكن الحصول على رنين فى هذه الدائرة .



شكل ٨ — ٤٣ شكل ٨ — ٤٢ شكل ٨ — ٤١

٨ — ٤١ الدائرة الموضحة فى الشكل ٨—٤٢ تكون فى حالة رنين عند قيمتين للسعة C عندما $\omega = 5000$ rad/s . أوجد قيمتى C ثم ارسم المحل الهندسى للمسامحة . الجواب : $121\mu F$ ، $20.6\mu F$

٨ — ٤٢ فى دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨—٤٣ كان التيار I_T لاحقا للجهد بزاوية $53.1°$ عندما $R = 0$ وإذا كانت $R = \infty$ (دائرة مفتوحة) فإن I_T يكون سابقا للجهد بنفس الزاوية . ارسم المحل الهندسى للمسامحة لتوضيح هذه النتيجة — عند أية قيمة لـ R تكون الدائرة فى حالة رنين ؟

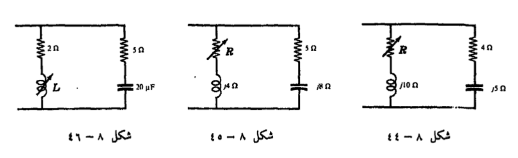
الجواب : $R = 6.25\ \Omega$

٨ — ٤٣ أوجد قيمة R التى تجعل دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨ — ٤٤ فى حالة رنين ثم ارسم المحل الهندسى للمسامحة لتوضيح النتيجـــة .

٨ — ٤٤ فى المسألة ٨—٤٣ ، ما هو التغيير الذى يجب ادخاله على الممانعة الحثية حتى نحصل على رنين عند قيمة ما للمقاومـــة المتغيرة R ؟ الجواب : $X_L \leq 8.2\,\Omega$

٨ — ٤٥ أوجد قيمة R التى تجعل دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨—٤٥ فى حالة رنين ثم ارسم المحل الهندسى .

الجواب : $R = 5.34\,\Omega$



شكل ٨ – ٤٦ شكل ٨ – ٤٥ شكل ٨ – ٤٤

٨ – ٤٦ فى المسألة ٨–١١ ، حصلنا على رنين فى الدائرة بتغيير السعة C . استخدم المحل الهندسى المساحة لتبين أنه توجد قيمة واحدة للسعة C تجعل الدائرة فى حالة رنين بدلا من القيمتين المعتادتين .

٨ – ٤٧ دائرة التوازى الموضحة فى الشكل ٨–٤٦ تصبح فى حالة رنين بتغيير L . ارسم المحل الهندسى المساحة وعين قيمة L عند الرنين إذا كانت $\omega = 5000$ rad/s .   الجواب : $L = 2.43$mH, 0.066 mH

٨ – ٤٨ باستخدام المحل الهندسى المساحة فى المسألة ٨–٤٧ ، أوجد قيمة L التى تجعل التيار الكلى أقل ما يمكن . ثم أوجد قيمة التيار إذا كانت القيمة الفعالة للجهد المؤثر هى 100 volts .

الجواب : $I_T = 5.1$ A و $L = 2.95$mH

٨ – ٤٩ فى المسألة ٨–٤٧ إذا كان الجهد المؤثر هو $\mathbf{V} = 150\angle 75^\circ$ V فاحسبْ قيمة $\mathbf{I}_T$ عند كل قيمة لـ L تجعل الدائرة فى حالة رنين .

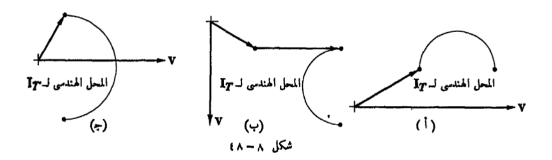
الجواب : $\mathbf{I}_T = 7.98\angle 75^\circ$ A, $78.9\angle 75^\circ$ A

٨ – ٥٠ فى دائرة تغيير الطور الموضحة فى الشكل ٨–٤٧ يراد تغيير طور $\mathbf{V}_{AB}$ فى المدى من 10° لاحق إلى 170° لاحق بالنسبة للجهد المؤثر $\mathbf{V}$. فإذا كانت الذبذبة هى 60 Hz فأوجد مدى R_1 الذى يحقق هذا التغيير .

شكل ٨ – ٤٧

الجواب : 46.4 → 6080 Ω

٨ – ٥١ توضح الأشكال ٨–٤٨ (أ) ، (ب) ، (جـ) المحل الهندسى للتيار الكلى المار فى دائرة تحتوى على عنصر متغير واحد . وضح الدائرة المقابلة لكل محل هندسى .



شكل ٨ – ٤٨

الجواب (ا) – دائرة توازى من فرعين الأول به R و X_C ثابتان والثانى به R ثابتة و X_C متغيرة .

(ب) – دائرة توازى من ثلاثة أفرع : الأول به R و X_C ثابتان والثانى به X_C ثابته والثالث به R ثابته و X_L متغيرة .

(جـ) – دائرة توازى من فرعين : الأول به R و X_C ثابتان والثانى به X_L ثابته و R متغيرة .

٨ – ٥٢ أوجد ثوابت الدائرة وطريقة توصيلها التى تقابل المحل الهندسى للتيار الموضح فى الشكل ٨ – ٤٩ ، علما بأن $\omega = 2000$ rad/s .

المحل الهندسى لـ I_T

شكل ٨ – ٤٩

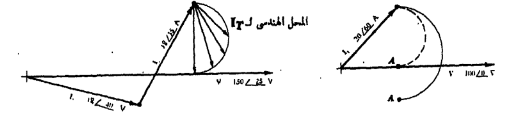
الجواب : الفرع الأول :

$R = 7.07\Omega$ ، $L = 3.54$mH

الفرع الثانى : C متغيرة ، $R = 7.07\Omega$

٨ – ٥٣ يوضح الشكل ٨–٥٠ المحل الهندسى لتيار دائرة توازى تتكون من فرعين . ما هو التغيير اللازم فى الفرع RL الذى يجعل النقطة A تقع على الجهد المطاور ؟

الجواب : وضع $X_L = 5.78\ \Omega$



شكل ٨ – ٥١ شكل ٨ – ٥٠

٨ – ٥٤ إذا كان الشكل ٨ – ٥١ يوضح المحل الهندسى لتيار دائرة توازى تتكون من ثلاثة أفرع فعين جميع ثوابت الدائرة علما بأن $\omega = 5000$ rad/s .

الجواب : الفرع الأول : $L = 0.423$ mH . $R = 8.05\Omega$.

الفرع الثانى : $C = 27.7\mu$F , $R = 4.16\Omega$.

الفرع الثالث : R متغيرة و $L = 2.74$ mH .

الفصل التاسع

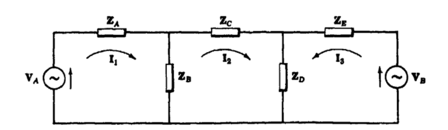
تحليل الشبكات الكهربائية بطريقة تيار الشبيكة

مقدمة :

إن وجود مصادر الجهد فى الدوائر الكهربائية أو الشبكات ينتج عنه مرور تيار فى كل فرع وفروق جهد عبر عناصر الدائرة . وحل الشبكة الكهربائية عبارة عن إيجاد التيارات فى الأفرع المختلفة أو الجهود عبر العناصر .

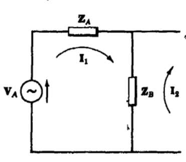
تيارات الشبيكة :

لتطبيق « طريقة تيار الشبيكة » نختار مساراً مغلقاً للتيار يسمى تيارات الشبيكة أو تيارات المسار المغلق ، كما هو موضح فى الشكل ٩ — ١ ثم نكتب ثلاث معادلات فى المجاهيل الثلاثة I_1 و I_2 و I_3 ونحلها . والآن فإن تيار أى فرع يمكن الحصول عليه إما مباشرة كواحد من تيارات الشبيكة أو بالتجميع فيما بينهم .



شكل ٩ — ١ تيارات الشبيكة أو المسار المغلق فى الشبكة الكهربائية

ولما كان التيار فى Z_A هو I_1 فإن التيار فى Z_B هو $I_2 - I_1$. وذلك بفرض أن اتجاه التيار الموجب هو لأسفل خلال المعاوقة . وعلى ذلك فإن تيار أى فرع فى الشبكة يمكن الحصول عليه بطريقة مماثلة . والجهد عبر أى عنصر من عناصر الدائرة هو حاصل ضرب التيار المطاور المار فى العنصر فى المعاوقة المركبة .



شكل ٩ — ٢

وللحصول على المعادلات الثلاث نطبق قانون كيرشوف للجهد على كل مسار مغلق للتيار . وفى الشكل ٩ — ٢ أعيد رسم مسار I_1 المغلق ، وبمساواة مجموع الهبوط فى الجهد حول المسار المغلق بمجموع الارتفاع فى الجهد نجد أن :

$$I_1 Z_A + (I_1 - I_2) Z_B = V_A \qquad (1)$$

وبما أن المسار المغلق الثانى لا يحتوى على مصدر جهد ، إذن مجموع الهبوط فى الجهد يساوى صفراً .

$$I_2 Z_C + (I_2 + I_3) Z_D + (I_2 - I_1) Z_B = 0 \qquad (2)$$

وبتطبيق قانون كيرشوف على المسار المغلق الثالث نجد أن :

$$I_3Z_E + (I_3 + I_2)Z_D = V_B \qquad (٣)$$

وبإعادة الترتيب نحصل على :

$$(Z_A + Z_B)I_1 - Z_BI_2 = V_A \qquad (١')$$

$$-Z_BI_1 + (Z_B + Z_C + Z_D)I_2 + Z_DI_3 = 0 \qquad (٢')$$

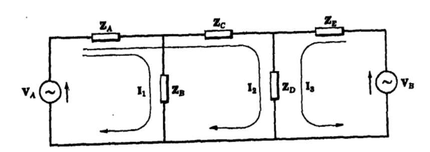
$$Z_DI_2 + (Z_D + Z_E)I_3 = V_B \qquad (٣')$$

ويمكننا الحصول على المعادلات السابقة مباشرة ، فإذا اعتبرنا المسار المغلق الموضح فى الشكل ٩ — ٢ وأخذنا اتجاه التيار I_1 فى اتجاه عقارب الساعة فإن جميع الهبوط فى الجهد فى هذا المسار والناتجة عن I_1 تكون موجبة . ويمر أيضاً تيار الشبيكة I_2 فى Z_B ولكن فى اتجاه مخالف لاتجاه I_1 . ولذلك فإن الهبوط فى الجهد على Z_B والناتج عن I_2 يكون $-Z_BI_2$. ونلاحظ أن الجهد V_A يكون موجباً لأنه فى نفس اتجاه I_1 . والآن إذا طبقنا قانون كيرشوف مع كل هذه الاعتبارات على المسار المغلق نحصل على المعادلة (١') . ويمكن الحصول على المعادلتين (٢') و (٣') بطريقة مماثلة .

لقد استعمرنا هنا تعبيرى « الارتفاع فى الجهد » و« الهبوط فى الجهد » من دوائر التيار المستمر حيث معناهما هناك أكثر وضوحاً منه فى الدوائر الجيبية التى فيها التيار والجهد اللحظيان لها فترات موجبة وسالبة . وفى الحالة الجيبية المستقرة ، فإن تطبيق قانون كيرشوف على مسار مغلق يعنى مساواة طورية يتساوى فيها مجموع الجهود المطاورة عبر المعاوقات بمجموع الجهود المطاورة للمصادر المؤثرة على نفس المسار المغلق .

اختيار تيارات الشبيكة :

فى حالة تطبيق طريقة تيارات الشبيكة ، يمكن تبسيط حل المسألة المعطاه عن طريق الاختيار المناسب للمسار المغلق فى الشبكة الكهربائية . فإذا أردنا تعيين التيار المار فى الفرع الذى يحتوى على Z_B فقط فى الشكل ٩ — ١ ، فإنه من الأسهل اختيار مسار مغلق واحد فقط يمر بـ Z_B ، حيث أننا نريد الحصول على تيار الشبيكة I_1 فقط . ويوضح الشكل ٩ — ٣ المسارات الجديدة المختارة .



شكل ٩ — ٣

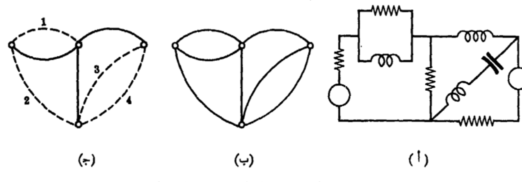
ومعادلات تيار الشبيكة المقابلة لهذا الاختيار هي :

$$(Z_A + Z_B)I_1 + Z_AI_2 = V_A$$
$$Z_AI_1 + (Z_A + Z_C + Z_D)I_2 + Z_DI_3 = V_A$$
$$Z_DI_2 + (Z_D + Z_E)I_3 = V_B$$

وعموماً فإنه في أي اختيار لتيار الشبيكة الكهربائية لابد أن يكون لكل عنصر من عناصر الدائرة تيار واحد فقط على الأقل ، وألا نفترض وجود فرعين لهما نفس التيار أو نفس مجموعة تيارات . ونورد في الفقرة التالية قواعد اختيار عدد تيارات الشبيكة اللازمة لحل الشبكة الكهربائية ، علماً بأن مجموعة التيارات الصحيحة هي ليست أقل عدد من تيارات الشبيكة .

ايجاد العدد اللازم من تيارات الشبيكة :

من السهل تحديد العدد اللازم من تيارات الشبيكة لحل شبكة كهربائية بسيطة . أما في حالة وجود عديد من الشبكات فإنه يلزمنا طريقة لتحديد عدد المعادلات اللازمة .



شكل ٩ — ٤ شبكة كهربائية ، بيانها وهيكلها

يوضح الشكل ٩ — ٤ (ب) بيان الشبكة الكهربائية وفيه مثلت نقط الاتصال بدوائر صغيرة وأفرع الشبكة بخطوط . والشكل ٩ — ٤ (جـ) يوضح لنا هيكل الشبكة الكهربائية والذي حصلنا عليه باعتبار الأفرع التي لا تمثل مسارات مغلقة فقط . وهيكل الشبكة الكهربائية ليس وحيداً . وتسمى الخطوط المتصلة في الشكل ٩ — ٤ (جـ) بهيكل الأفرع أما الخطوط المتقطعة فتسمى أفرع اتصال ، وكل فرع اتصال ينتج عنه مسار مغلق . إن عدد تيارات الشبيكة اللازمة في هذه الشبكة الكهربائية هو عدد أفرع الإتصال (أربعة) . نفس النتيجة يمكن الحصول عليها بقطع أفرع الشبكة الأصلية بحيث أن كل قطع يفتح لنا مساراً مغلقاً . وعندما لا يبقى عندنا مسارات مغلقة فإن عدد الأفرع المقطوعة يمثل عدد تيارات الشبيكة اللازمة .

وهناك طريقة ثالثة تتكون من عدد الأفرع ونقط الاتصال في الشبكة الكهربائية ، ويعطى عدد تيارات الشبيكة اللازمة بالعلاقة الآتية :

عدد المعادلات = عدد الأفرع — (عدد نقط الاتصال — ١) .

وفي الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ — ٤ (أ) لدينا سبعة أفرع وأربع نقط اتصال ، وعلى ذلك فإن عدد تيارات الشبيكة اللازمة هو $4 = (4 - 1) - 7$

معادلات الشبيكة عن طريق الفحص :

الصورة العامة لمعادلات الشبكة الكهربائية التي بها ثلاث شبيكات فرعية هي .

$$Z_{11}I_1 \pm Z_{12}I_2 \pm Z_{13}I_3 = V_1$$

$$\pm Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \pm Z_{23}I_3 = V_2$$

$$\pm Z_{31}I_1 \pm Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 = V_3$$

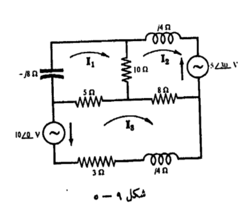
تسمى Z_{11} المعاوقة الذاتية للمسار المغلق الأول وتعطى بمجموع جميع المعاوقات التي يمر فيها التيار I_1 . Z_{22} و Z_{33} هما المعاوقتان الذاتيتان للمسارين المغلقين الثاني والثالث ، ويعطيان بمجموع المعاوقات في المسار المغلق لكل منهما .

Z_{12} هي مجموع كل المعاوقات المشتركة بين تياري الشبيكة I_1 و I_2 . من هذا ينتج أن $Z_{12} = Z_{21}$. والمعاوقات Z_{13} و Z_{31} و Z_{23} و Z_{32} هي مجموع المعاوقات المشتركة بين التيارات المارة في المسارات المغلقة الخاصة بها . وتستخدم الإشارة الموجبة إذا كان كل من التيارات التي تمر في المعاوقة المشتركة في نفس الاتجاه ، وتستخدم الإشارة السالبة في عكس ذلك .

تمثل V_1 مجموع الجهود التي تعمل في المسار الأول . وتستخدم الإشارة الموجبة إذا كان المصدر يعمل في اتجاه تيار الشبيكة والإشارة السالبة إذا كان يعمل في عكس اتجاه تيار الشبيكة . V_2 و V_3 هما مجموع المصادر التي تعمل في المسار المغلق لكل منهما .

مثال ١ :

أكتب معادلات تيارات الشبيكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ — ٥ .



شكل ٩ — ٥

إن تيارات الشبيكة موضحة في رسم الدائرة ، وبما أنه لا يوجد مصدر للجهد في المسار المغلق الأول فإن مجموع الهبوط في الجهد يساوي صفراً .

$$I_1(-j8) + (I_1 - I_2)\,10 + (I_1 - I_3)\,5 = 0$$

وبما أن مصدر الجهد $5\angle 30^\circ$ والذي يعمل في المسار المغلق الثاني اتجاهه في عكس اتجاه التيار إذن فإشارته سالبة .

$$I_2(j4) + (I_2 - I_3)8 + (I_2 - I_1)10 = -(5\angle 30)$$

وبتطبيق قانون كيرشوف للجهد على المسار الثالث نحصل على

$$I_3(3 + j4) + (I_3 - I_1)5 + (I_3 - I_2)8 = -(10\angle 0)$$

وبإعادة ترتيب الحدود في المعادلات الثلاث نحصل على

$$(15 - j8)I_1 - 10I_2 - 5I_3 = 0$$

$$-10I_1 + (18 + j4)I_2 - 8I_3 = -(5\angle 30^\circ)$$

$$-5I_1 - 8I_2 + (16 + j4)I_3 = -(10\angle 0^\circ)$$

وبمقارنة مجموعة المعادلات هذه بالصورة العامة للمعادلات الثلاث الخاصة بالشبكة الكهربائية ذات ثلاث شبيكات فرعية ، نجد أن المعاوقة الذاتية للمسار الأول هى $Z_{11} = (5 + 10 - j8) = 15 - j8\,\Omega$. والمعاوقة المشتركة بين المسارين المغلقين الأول والثانى هى $Z_{12} = 10\,\Omega$ وعلى ذلك فإن I_2 فى عكس اتجاه التيار I_1 ، اى أن Z_{12} لها إشارة سالبة . وبالمثل نجد أن المعاوقة المشتركة بين المسارين المغلقين الأول والثالث هى $Z_{13} = -5\,\Omega$. ولاحظ أن : $Z_{12} = Z_{21}, Z_{13} = Z_{31}, Z_{23} = Z_{32}$.

الجهد الذى يعمل فى المسار الثانى هو $5\underline{/30^\circ}\ V$ ولكنه يعمل فى عكس اتجاه تيارا الشبيكة وعلى ذلك فإشارته سالبة . ويمكن اختبار كل حد فى مجموعة المعادلات السابقة بالصيغة العامة .

مصفوفات :

المصفوفة هى ترتيب تعامدى لأعداد أو دوال موضوعة بين قوسين وتخضع لقواعد خاصة فى العمليات . فى المصفوفة ،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تسمى الأعداد أو الدوال a_{ij} بعناصر المصفوفة ، فالعنصر a_{ij} يقع فى الصف i والعمود j ورتبة هذه المصفوفة ذات m صفا و n عموداً "$m\times n$" وتسمى « المصفوفة A » أو « الـ $m\times n$ مصفوفة A » «أو» الـ $m\times n$ مصفوفة $[a_{ij}]$.

يقال عن مصفوفتين أنهما متساويتان اذا – واذا فقط – كانت احداهما مطابقة تماما للثانية .

جمع المصفوفات :

يمكن جمع أو طرح مصفوفتين إذا كانتا من نفس الرتبة وإذا اختلفتا مصفوفتين فى الرتبة فإنه لا يمكن جمعها أو طرحها .

إن مجموع (فرق) مصفوفتين من الرتبة $m\times n$ مثل $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ هو مصفوفة C من الرتبة $m\times n$ بحيث كل عنصر فى C هو مجموع (فرق) العنصرين المتقابلين فى A و B . أى $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$

مثال ٢ :

إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ فإن :

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} ، A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات :

إن حاصل الضرب AB (بنفس الترتيب) . المصفوفتين : $A = [a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1m}]$ مصفوفة $1 \times m$.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$ مصفوفة $m \times 1$

هو ال 1×1 مصفوفة حيث

$$C = [a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1m}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k}\, b_{k1}\right]$$

لاحظ أن كل عنصر فى الصف قد ضرب فى العنصر المقابل له فى العمود ثم جمع حاصل الضرب .

مثال ٣ :

$$[1\ \ 3\ \ 5]\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = [1(2) + 3(4) + 5(-2)] = [4]$$

إن حاصل الضرب AB (بنفس الترتيب) لـ $A = [a_{ij}]$ =مصفوفة $m \times s$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة $v \times n$ هو $C = [c_{ij}]$ مصفوفة $m \times n$ حيث

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\, b_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

مثال ٤ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

مثال ٥ :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_1 + 5I_2 - 8I_3 \\ 2I_1 + 1I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{bmatrix}$$

مثال ٦ :

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(8) + (-3)(7) & 5(-2) + (-3)(0) & 5(6) + (-3)(9) \\ 4(8) + 2(7) & 4(-2) + 2(0) & 4(6) + 2(9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix}$$

ويقال إن مصفوفة A مناسبة للضرب فى مصفوفة B ، أى أن حاصل الضرب AB يمكن تعريفه ، إذا كان عدد الأعمدة فى A يساوى عدد الصفوف فى B . وعلى ذلك إذا كانت A هى المصفوفة 2×3 و B هى المصفوفة 2×5 فإن حاصل الضرب AB يكون معرفاً أما حاصل الضرب BA فهو غير معرف . وإذا كانت D هى المصفوفة 3×3 و E هى المصفوفة 3×3 فإن كلا من حاصل الضرب DE و ED يكون معرفاً .

التعاكس :

يقال إن التعاكس موجود فى ترتيب معين لأعداد موجبة صحيحة إذا كان العدد الصحيح الأكبر سابقاً للعدد الصحيح الأصغر فى هذا الترتيب .

فمثلا نجد فى 132 أن 3 تسبق 2 وعلى ذلك فإنه يوجد تعاكس واحد . وفى 4213 نجد أن 4 تسبق كلا من 3 ، 1 ، 2 ، وأن 2 تسبق 1 وعلى ذلك فإنه توجد أربعة تعاكسات . وفى 3421 نجد أن 3 تسبق كلا من 1 ، 2 ، كما أن 4 تسبق كلا من 1 ، 2 ، كما أن 2 تسبق 1 . على ذلك فإنه توجد خمسة تعاكسات .

محددة المصفوفة المربعة :

خذ n عنصراً من المصفوفة المربعة — n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ثم شكل حاصل الضرب $a_{1j_1}\, a_{2j_2}\, a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$ بحيث ينتمى عنصر وعنصر واحد فقط لكل صف وبحيث ينتمى عنصر وعنصر واحد فقط لكل عمود . لاحظ أن متتابعة الدليل الأول هى من الرتبة n و ... و 2 و 1 وأن متتابعة الدليل الثانى j_n و . . . و j_2 و j_1 هى تبديله من الـ $n!$ تبديلات للأعداد الصحيحة n و . . . و 2 و 1 . الإشارة الموجبة أو السالبة لحاصل الضرب تتبع عدد التعاكسات فى الدليل الثانى إذا كان زوجياً أو فردياً .

إن محددة المصفوفة المربعة A من رتبة n وتكتب $|A|$ هى مجموعة كل $n!$.

تسمى محددة المصفوفة المربعة من رتبة n بمحددة من الرتبة n .

مثال ٧ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال ٨ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

المحددات والعوامل المشتركة :

إن محيددة العنصر a_{ij} لمحددة من الرتبة n هو محددة من الرتبة $(n - 1)$ والتى نحصل عليها بحذف الصف والعمود المحتويين العنصر المعطى . ويرمز لمحيددة العنصر a_{ij} بالرمز $|M_{ij}|$.

وتسمى المحددة $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ بالعامل المشترك لـ a_{ij} ويرمز لها بالرمز Δ_{ij} .

مثال ٩ :

للمحددة من الرتبة الثالثة $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ نجد أن :

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

قيمة المحددة :

إن قيمة المحددة $|A|$ من الرتبة n هى مجموع الـ n حاصل ضرب والذى نحصل عليه بضرب كل عنصر فى أى صف (عمود) نختاره فى $|A|$ بعاملة المشترك . أى أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$$

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

هو التعبير عن $|A|$ من خلال العمود الثانى .

مثال ١٠ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\{4(-6) - 7(1)\} - 5\{1(-6) - 7(2)\} + 0 = 7$$

مثال ١١ :

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5\{1(3) - 2(4)\} = 25$$

مثال ١٢ :

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 5\{4(-3) - (-2)(8)\} = 20$$

خواص المحددات :

١ - إذا تطابق صفان (عمودان) فى محددة فإن قيمة المحددة تساوى صفراً . فمثلا :

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

٢ – إذا ضرب كل عنصر فى صف ما (عمود) فى المحددة بأى عدد k فإن المحددة تكون مضروبة فى k . فمثلا

$$2\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

٣ – إذا تبادلا أى صفين (عمودين) فى محددة فإن إشارة المحددة تتغير . فمثلا .

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \\ -6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

٤ – إذا عوضنا عن كل عنصر من عناصر صف (عمود) فى محددة بمجموع عددين أو أكبر ، فإنه يمكن كتابة المحددة على صورة مجموع محددتين أو أكثر . فمثلا .

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9+2 & 5 \\ 2 & 4+0 & -5 \\ 1 & 8-2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

٥ – إذا أضفنا إلى عناصر أى صف (عمود) فى محددة k مرة من العنصر المقابل لأى صف (عمود) آخر فإن قيمة المحددة لا تتغير .

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9+3(-3) & -3 \\ 4 & 6+3(-2) & -2 \\ -3 & 1+3(5) & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 16 & 5 \end{vmatrix}$$

حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات ، قاعدة كرامر :

يمكن كتابة مجموعة المعادلات الثلاث الخطية فى المجاهيل الثلاثة x_3 و x_2 و x_1

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= k_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= k_3 \end{aligned}$$

على صورة مصفوفة مثل :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

تكون القيمة العددية لعامل المحددة Δ_a مضروبة في x_1 إذا ضربنا كل عنصر من عناصر العمود الأول في x_1 (خاصية ٢) .

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} , \quad x_1\Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

والآن إذا أضفنا إلى كل عنصر من عناصر العمود الأول في المحددة الأخيرة x_2 مرة من العنصر المقابل في العمود الثاني و x_3 مرة من العنصر المقابل في العمود الثالث . (خاصية ٥) فإننا نحصل على :

$$x_1\Delta_a = \begin{vmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

أو

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a}$$

طالما أن $\Delta_a \neq 0$ وبالمثل :

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{\Delta_a} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a}$$

وتسمى هذه الطريقة في الحل بقاعدة كرامر . ويمكن تطبيقها على أى مجموعة تحتوى على n من المعادلات الخطية في n مجهول طالما أن عوامل المحددة لا تساوى صفراً .

طريقة المصفوفة في تحليل الدوائر :

إن معادلات تيار الشبكة الثلاث :

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 \pm Z_{12}I_2 \pm Z_{13}I_3 &= V_1 \\ \pm Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \pm Z_{23}I_3 &= V_2 \\ \pm Z_{31}I_1 \pm Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 &= V_3 \end{aligned}$$

يمكن كتابتها الآن على صيغة مصفوفة :

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

أو

$$[Z][I] = [V]$$

وهى الصيغة المصفوفية لقانون أوم حيث $[Z]$ هى مصفوفة المعاوقة ، $[I]$ هى مصفوفة التيار ، $[V]$ هى مصفوفة الجهد .

ويمكن الحصول على تيارات الشبكية I_1 و I_2 و I_3 كنسبة بين محددتين .

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ V_2 & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ V_3 & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z} \qquad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & V_1 & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & V_2 & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & V_3 & Z_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z} \qquad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & V_1 \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & V_2 \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & V_3 \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

وعند فك محددة البسط بواسطة العمود المحتوى على الجهود فإننا نحصل على معادلات تيارات الشبكية التالية .

$$I_1 = V_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z}\right) + V_2\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z}\right) + V_3\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_z}\right) \qquad (١)$$

$$I_2 = V_1\left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_z}\right) + V_2\left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_z}\right) + V_3\left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_z}\right) \qquad (٢)$$

$$I_3 = V_1\left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_z}\right) + V_2\left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_z}\right) + V_3\left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_z}\right) \qquad (٣)$$

إن الحدود التى فى الطرف الأيمن للمعادلات (١) و (٢) و (٣) هى المركبات الطورية الناتجة عن مصادر الجهد المختلفة . وعلى ذلك فإن تيار الشبيكة I_1 فى المعادلة (١) يتكون من ثلاثة أجزاء : $V_1(\Delta_{11}/\Delta_2)$ نتيجة مصدر الجهد V_1 و $V_2(\Delta_{21}/\Delta_Z)$ نتيجة مصدر الجهد V_2 و $V_3(\Delta_{31}/\Delta_Z)$ نتيجة مصدر الجهد V_3 .

نقطة المعاوقة المحركة :

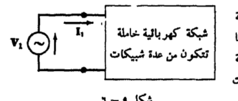
اعتبر الشبكة الخاملة أو الخالية من المصادر الموضحة فى الشكل ٩ — ٦ والتى لها نقطتا اتصال خارجيتان ، فإذا أثر عليها مصدر جهد V_1 وكان تيار الشبيكة هو I_1 ، وحيث أنه لا توجد مصادر أخرى فى الشبكة الكهربائية ، فإن معادلة تيار الشبيكة I_1 تكون

$$I_1 = V_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_z}\right) + \cdots = V_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_z}\right)$$

وتعرف المعاوقة الداخلة أو نقطة المعاوقة المحركة بأنها النسبة بين الجهد المؤثر V_1 والتيار الناتج I_1 . أى أن

$$Z_{input\,1} = V_1/I_1 = \Delta_z/\Delta_{11}$$

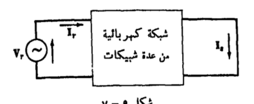
وتعرف المعاوقة الداخلة لشبكة كهربائية نشطة بأنها معاوقة الشبكة الكهربائية بين نهايتين محددتين وذلك مع رفع جميع المصادر الداخلية ووضع معاوقاتها الداخلية بدلا منها . وعلى ذلك فإن النسبة Δ_Z/Δ_{11} هى نقطة المعاوقة المحركة للمسار المغلق الأول بغض النظر عن الشبكة الكهربائية سواء كانت خاملة أو نشطة .



شكل ٩ — ٦

معاوقة الانتقال :

إن وجود مصدر محرك الجهد فى أى شبيكة فرعية ينتج عنه تيار فى الشبيكات الفرعية الأخرى للشبكة الكهربائية الكلية . وتعرف معاوقة الانتقال بأنها النسبة بين الجهد المحرك فى شبيكة فرعية والتيار الناتج فى شبيكة فرعية أخرى مع وضع جميع المصادر مساوية للصفر .



شكل ٩ – ٧

وباعتبار الشبكة الموضحة فى الشكل ٩ – ٧ والتى فيها V_r هو الجهد المحرك فى الشبيكة r والتيار الناتج I_s فى الشبيكة s فإن

$$I_s = (0)\left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_z}\right) + \cdots + V_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}\right) + \cdots + (0)\left(\frac{\Delta_{ns}}{\Delta_z}\right) = V_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}\right)$$

$$Z_{\text{transfer } rs} = V_r/I_s = \Delta_z/\Delta_{rs}$$

والدليل المزدوج ، rs لمعاوقة الانتقال يعنى اتجاه الفعل ، أى أن المصدر فى الشبيكة r والتيار الناتج فى الشبيكة s . وعلى ذلك فإن محددة المقام هى العامل المشترك للموضع ، sr ، Δrs ، وبنفس دليل معاوقة الانتقال .

مســائل محلولة

٩ – ١ إذا أعطيت الاختيار الموضح فى الشكل ٩ – ٨ لتيارات الشبيكة فاكتب معادلات تيارات الشبيكة ثم ضعهما فى الصيغة المصفوفية .

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على كل من الشبيكات الثلاث الفرعية :

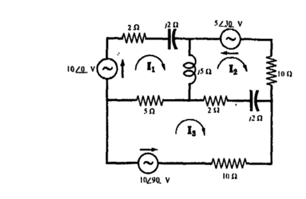
$$I_1(2-j2) + (I_1-I_2)(j5) + (I_1-I_3)5 = 10\angle 0^\circ$$
$$I_2(10) + (I_2-I_3)(2-j2) + (I_2-I_1)(j5) = -(5\angle 30^\circ)$$
$$I_3(10) + (I_3-I_1)(5) + (I_3-I_2)(2-j2) = -(10\angle 90^\circ)$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على :

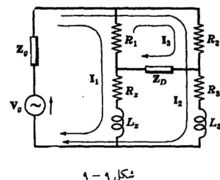
$$(7+j3)I_1 - (j5)I_2 - (5)I_3 = 10\angle 0^\circ$$
$$-(j5)I_1 + (12+j3)I_2 - (2-j2)I_3 = -(5\angle 30^\circ)$$
$$-(5)I_1 - (2-j2)I_2 + (17-j2)I_3 = -(10\angle 90^\circ)$$

والذى يمكن التعبير عنهم بالصورة المصفوفية على الشكل :

$$\begin{bmatrix} 7+j3 & -j5 & -5 \\ -j5 & 12+j3 & -(2-j2) \\ -5 & -(2-j2) & 17-j2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ -(5\angle 30^\circ) \\ -(10\angle 90^\circ) \end{bmatrix}$$



شكل ٩ — ٨



شكل ٩ — ٩

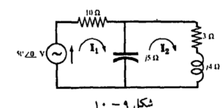
٩ — ٢ أكتب معادلات تيار الشبيكة على الصيغة المصفوفية بالفحص وذلك للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ —٩ .

تحدد الحدود فى مصفوفة المعاوقة بتعريفاتهم . Z_{11} المعاوقة الذاتية للمسار المغلق الأول وهى مجموع جميع المعاوقات فى المسار المغلق ، $(R_1 + R_x + j\omega L_x + Z_g)$. Z_{12} المعاوقة المشتركة لتيارى الشبيكة الأول والثانى و Z_g بإشارة موجبة وذلك لأن التيارين يمران فى اتجاه واحد . إن مصفوفة التيار تتكون ببساطة من I_1 و I_2 و I_3 ومصفوفة الجهد تتكون من الجهود المحركة فى المسارات المغلقة . وعلى ذلك فالمعادلة المصفوفية هى

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_x+j\omega L_x+Z_g) & Z_g & -R_1 \\ Z_g & (R_2+R_3+j\omega L_3+Z_g) & R_2 \\ -R_1 & R_2 & (R_1+R_2+Z_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ V_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

٩ — ٣ أوجد القدرة الداخلة لمصدر الجهد للدائرة الموضحة فى الشكل ٩ — ١٠ ثم عين أيضاً قدرة مقاومات الدائرة .

نختار تيارات الشبيكة كما هو موضح فى شكل الدائرة وعلى ذلك فإن المصدر يحتوى على تيار واحد . إذن



شكل ٩ — ١٠

$$\begin{bmatrix} 10-j5 & j5 \\ j5 & 3-j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50\angle 0^\circ & j5 \\ 0 & 3-j1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10-j5 & j5 \\ j5 & 3-j1 \end{vmatrix}} = \frac{150-j50}{50-j25} = 2{\cdot}83\angle 8{\cdot}14^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10-j5 & 50\angle 0^\circ \\ j5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{-j250}{50-j25} = 4{\cdot}47\angle -63{\cdot}4^\circ \text{ A}$$

ومصدر القدرة $P = VI\cos\theta = 50(2{\cdot}83)\cos(8{\cdot}14^\circ) = 140\text{ W}$. والقدرة فى المقاومة 10 Ω هى $P_{10} = (I_1)^2\,10 = (2.83)^2\,10 = 80\text{W}$ والقدرة فى المقاومة 3 Ω هى $P_3 = (I_2)^2\,3 = 60\text{W}$ ، ومجموعهما هو 140 W وهو يساوى القدرة الداخلة للمصدر .

٤ إذا اختيرت تيارات الشبكة لنفس دائرة المسألة ٩ – ٣ بالطريقة الموضحة فى الشكل ٩ – ١١ ، فأوجد القدرة الخارجة للمصدر .

شكل ٩ – ١١

إن معادلات تيارات الشبكة فى الصيغة المصفوفية هى

$$\begin{bmatrix} 10 - j5 & 10 \\ 10 & 13 + j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 0^\circ \\ 50\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50\angle 0^\circ & 10 \\ 50\angle 0^\circ & 13 + j4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 10 \\ 10 & 13 + j4 \end{vmatrix}} = \frac{150 + j200}{50 - j25} = 4{\cdot}47\angle 79{\cdot}7^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 50\angle 0^\circ \\ 10 & 50\angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{-j250}{50 - j25} = 4{\cdot}47\angle -63{\cdot}4^\circ \text{ A}$$

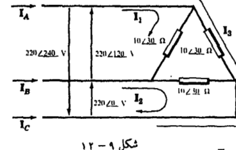
وبما أن الفرع الذى يحتوى على المصدر يمر به تياران إذن

$$I_1 + I_2 = \left(\frac{150 + j200}{50 - j25}\right) + \left(\frac{-j250}{50 - j25}\right) = 2{\cdot}83\angle 8{\cdot}14 \text{ A}$$

وقدرة المصدر هى

$$P = VI\cos\theta = 50(2{\cdot}83)\cos 8{\cdot}14 = 140 \text{ W}$$

٩ – ٥ إذا كان للدائرة الموضحة فى الشكل ٩ – ١٢ جهود بين كل زوجين من الخطوط الثلاثة . فأوجد التيارات I_A و I_B و I_C .



شكل ٩ – ١٢

وباختيار التيارات كما هو موضح بالرسم نجد أن التيارات مستقلة عن بعضها . ويتضح هذا عند كتابة المصفوفة بالصورة :

$$\begin{bmatrix} 10\angle 30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 10\angle 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 10\angle 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\angle 120^\circ \\ 220\angle 0^\circ \\ 220\angle 240^\circ \end{bmatrix}$$

ومنها ينتج التيارات الثلاثة :

$$I_1 = \frac{220\angle 120^\circ}{10\angle 30^\circ} = 22\angle 90^\circ \text{ A}. \quad I_2 = \frac{220\angle 0^\circ}{10\angle 30^\circ} = 22\angle -30^\circ \text{ A}. \quad I_3 = \frac{220\angle 240^\circ}{10\angle 30^\circ} = 22\angle 210^\circ \text{ A}$$

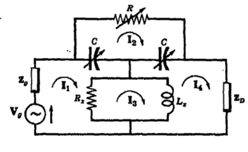
إذن :

$$I_A = I_1 - I_3 = (22\angle 90^\circ - 22\angle 210^\circ) = 38{\cdot}1\angle 60^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_2 - I_1 = (22\angle -30^\circ - 22\angle 90^\circ) = 38{\cdot}1\angle -60^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_3 - I_2 = (22\angle 210^\circ - 22\angle -30^\circ) = 38{\cdot}1\angle 180^\circ \text{ A}$$

٩ – ٦ إذا اختيرت تيارات الشبيكة للشبكة الكهربائية التي تحتوى على أربع شبيكات فرعية كما هو موضح في الشكل ٩ – ١٣ ، وإذا اختيرت قيم R وسعة المكثفين المتساويين في السعة C farods بحيث كان التيار المار في Z_D يساوى صفراً . فعبر عن المجهولين R_X و L_X بدلالة كل من R و C وذبذبة المصدر ω rad/s .



شكل ٩ – ١٣

إن معادلات التيار في الصيغة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} \left(R_x+\frac{1}{j\omega C}+Z_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & 0 \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R+\frac{1}{j\omega C}+\frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) \\ -R_x & 0 & (R_x+j\omega L_x) & -(j\omega L_x) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) & \left(\frac{1}{j\omega C}+j\omega L_x+Z_D\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض عن I_4 ، التيار المار في Z_D ، في صيغة محددة ومساواتها بالصفر .

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} \left(R_x+\frac{1}{j\omega C}+Z_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & V_g \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R+\frac{1}{j\omega C}+\frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & 0 \\ -R_x & 0 & (R_x+j\omega L_x) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

وبفك البسط بواسطة عناصر العمود الرابع نحصل على

$$-V_g \begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R+\frac{1}{j\omega C}+\frac{1}{j\omega C}\right) & 0 \\ -R_x & 0 & (R_x+j\omega L_x) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_x) \end{vmatrix} = 0$$

وحيث أن هذه المحددة مساوية للصفر إذن :

$$-(-R_x)(R+1/j\omega C+1/j\omega C)(-j\omega L_x) - (-1/j\omega C)(-1/j\omega C)(R_x+j\omega L_x) = 0$$

ومنها نحصل على $R_x = 1/\omega^2C^2R$ و $L_x = 1/2\omega^2 C$

٩ – ٧ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ٩ – ١٤ عين التيارات $\mathbf{I}_A$ و $\mathbf{I}_B$ و $\mathbf{I}_C$.

إذا اختير تيارى الشبكة كما هو موضح فى الشكل فإن معدلتهما فى الصيغة المصفوفية هى :

$$\begin{bmatrix} 6-j8 & -(3-j4) \\ -(3-j4) & 6-j8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\angle 120^\circ \\ 220\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

شكل ٩ – ١٤

ومنها نجد أن :

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 220\angle 120^\circ & -(3-j4) \\ 220\angle 0^\circ & 6-j8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6-j8 & -(3-j4) \\ -(3-j4) & 6-j8 \end{vmatrix}} = \frac{2200\angle 66.9^\circ + 1100\angle -53.1^\circ}{100\angle -106.2^\circ - 25\angle -106.2^\circ} = \frac{1905\angle 36.9^\circ}{75\angle -106.2^\circ} = 25.4\angle 143.1^\circ\ \text{A}$$

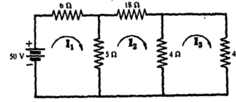
$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6-j8 & 220\angle 120^\circ \\ -(3-j4) & 220\angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{2200\angle -53.1^\circ + 1100\angle 66.9^\circ}{75\angle -106.2^\circ} = \frac{1905\angle -23.2^\circ}{75\angle -106.2^\circ} = 25.4\angle 83^\circ\ \text{A}$$

والتيارات المطلوبة هى

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_1 = 25.4\angle 143.1\ \text{A},\quad \mathbf{I}_B = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = (25.4\angle 83 - 25.4\angle 143.1) = 25.4\angle 23.1\ \text{A}$$

و $\mathbf{I}_C = -\mathbf{I}_2 = 25.4\angle -97\ \text{A}$

٩ – ٨ باستخدام طرق المصفوفات عين المعاوقة الداخلة لمصدر 50 V الدائرة الموضحة فى الشكل ٩ – ١٥ ، ثم احسب I_1 باستخدام هذه المعاوقة .



شكل ٩ – ١٥

إن المعاوقة الداخلة للمسار المغلق الأول هى :

$$Z_{\text{input }1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -5 & 27 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 27 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{200} = 10\,\Omega$$

ومنها

$$I_1 = V_1/Z_{\text{input }1} = 50/10 = 5\ \text{A}.$$

٩ – ٩ للدائرة الموضحة فى الشكل ٩ – ١٥ أوجد تيار الشبكة I_3 وذلك باستخدام معاوقة الانتقال .

بما أن المصدر فى المسار المغلق الأول والتيار المطلوب فى المسار المغلق الثالث ، إذن معاوقة الانتقال المطلوبة هى

$$Z_{\text{transfer }13} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = \frac{2000}{\begin{vmatrix} -5 & 27 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{20} = 100\,\Omega$$

وتيار الشبيكة المطلوب هو :

$$I_3 = V_1/Z_{\text{transfer }13} = 50/100 = 0.5\ \text{A}$$

٩ – ١٠ للدائرة الموضحة بالشكل ٩ – ١٥ أوجد تيار الشبكة I_2 وذلك باستخدام معاوقة الانتقال .

بما أن المصدر فى المسار المغلق الاول والتيار المطلوب فى المسار المغلق الثانى ، إذن معاوقة الانتقال المطلوبة هى

$$Z_{\text{transfer 12}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{2000}{(-1)\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{40} = 50\,\Omega$$

والتيار المطلوب هو :

$$I_2 = V_1/Z_{\text{transfer 12}} = 50/50 = 1\ \text{A}.$$

٩ – ١١ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ – ١٦أوجد ، الجهود $\mathbf{V}_{AB}$ و $\mathbf{V}_{BC}$.

معادلات تيارات الشبكة بالصيغة المصفوفية هى :

$$\begin{bmatrix} 3+j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\angle 45^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

شكل ٩ – ١٦

ومنها نجد أن :

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100\angle 45^\circ & -j10 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0}{100} = 0, \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j14 & 100\angle 45^\circ \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{1000\angle 135}{100} = 10\angle 135\ \text{A}$$

إذن : $0 = \mathbf{I}_1(3+j4) = \mathbf{V}_{AB}$ ، و $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{I}_2(-j10) = 10\angle 135\,(10\angle -90) = 100\angle 45\ \text{V}$

والمجموع هو $100\angle 45^\circ\text{V} = (\mathbf{V}_{AB} + \mathbf{V}_{BC})$ وهو الجهد المطاور المطلوب .

٩ – ١٢ للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ – ١٧ أوجد المركبات الثلاثة لمثلث القدرة وذلك للمصدر $10\angle 30^\circ$.

نختار تيارات الشبيكة كما هو موضح . فيكون هناك تيار واحد فقط $\mathbf{I}_1$ فى الفرع الذى يحتوى على المصدر . وبما أنه لا يوجد غير مصدر واحد فى الشبكة الكهربائية فإنه يمكن استخدام نقطة المعاوقة المحركة لحساب $\mathbf{I}_1$.

شكل ٩ – ١٧

$$\mathbf{Z}_{\text{input 1}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8+j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7-j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8+j5 & -5 \\ -5 & 7-j2 \end{vmatrix}} = \frac{315\angle 16{\cdot}2}{45{\cdot}1\angle 24{\cdot}9} = 6{\cdot}98\angle -8{\cdot}7\ \Omega$$

و

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_{\text{input 1}} = (10\angle 30^\circ)/(6{\cdot}98\angle -8{\cdot}7^\circ) = 1{\cdot}43\angle 38{\cdot}7\ \text{A}$$

وقدرة المصدر الداخلة هى $P = V_1I_1\cos\theta = 10(1\cdot43)\cos 8\cdot7^\circ = 14\cdot1\ W$ والقدرة المعاوقة سابقة وتساوى $Q = V_1I_1\sin 8\cdot7 = 2\cdot16\ var$, والقدرة الظاهرة هى $S = V_1I_1 = 14\cdot3\ VA$

٩ – ١٣ الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ – ١٧ أوجد تيارات الشبيكة $\mathbf{I}_3$ و $\mathbf{I}_2$ وذلك باستخدام معاوقتى الانتقال بما أن المصدر فى المسار المغلق الأول والتيار المطلوب فى المسار الثانى . إذن معاوقة الانتقال اللازمة هى

$$\mathbf{Z}_{transfer\,12} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{315/16\cdot2^\circ}{(-1)\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 0 & 7-j2\end{vmatrix}} = \frac{315/16\cdot2^\circ}{21\cdot8/-16^\circ} = 14\cdot45/32\cdot2^\circ\ \Omega$$

والتيار المطلوب هو

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_{transfer\,12} = (10/30^\circ)/(14\cdot45/32\cdot2^\circ) = 0\cdot693/-2\cdot2^\circ\ A$$

وبالمثل

$$\mathbf{Z}_{transfer\,13} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = \frac{315/16\cdot2^\circ}{\begin{vmatrix}-3 & 8+j5\\ 0 & -5\end{vmatrix}} = \frac{315/16\cdot2^\circ}{15} = 21/16\cdot2^\circ\ \Omega$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1/\mathbf{Z}_{transfer\,13} = (10/30^\circ)/(21/16\cdot2^\circ) = 0\cdot476/13\cdot8^\circ\ A$$

٩ – ١٤ الشكل ٩ – ١٧ أوجد القدرة فى مقاومات الشبكة الكهربائية ثم قارنها بقدرة المصدر

لدينا من المسألتين ٩ – ١٢ ، ٩ – ١٣ $I_1 = 1\cdot43\angle 38\cdot7\ A,\ I_2 = 0\cdot693\angle -2\cdot2\ A,\ I_3 = 0\cdot476\angle 13\cdot8\ A.$

والقدرة فى المقاومة 5Ω هى $P = (I_1)^2 5 = (1\cdot43)^2 5 = 10\cdot2\ W$. ويمر فى المقاومة 3Ω تياران من تيارات الشبيكة وعلى ذلك فإن تيار الفرع هو

$$(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = (1\cdot115 + j0\cdot895) - (0\cdot693 - j0\cdot027) = 0\cdot422 + j0\cdot922 = 1\cdot01\angle 65\cdot4^\circ\ A:$$

إذن $P = (1\cdot01)^2 3 = 3\cdot06\ W.$

وبالمثل فإن التيار المار فى الفرع الذى يحتوى على المقاومة $5\ \Omega$ هو

$$(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) = (0\cdot693 - j0\cdot027) - (0\cdot462 + j0\cdot113) = (0\cdot231 - j0\cdot140) = 0\cdot271\angle -31\cdot2^\circ\ A$$

والقدرة هى $P = (0.271)^2 5 = 0.367W$, والقدرة فى المقاومة 2Ω هى $P = (I_3)^2 2 = (0.476)^2 2 = 0.453\,W$

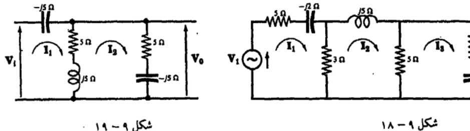
والقدرة الكلية للشبكة الكهربائية هى $P_T = 10\cdot2 + 3\cdot06 + 0\cdot367 + 0\cdot453 = 14\cdot1\ W$ وهى تساوى القدرة الداخلة فى المسألة ٩ – ١٢ .

٩ – ١٥ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ – ١٨ ينتج جهد $\mathbf{V}_0$ عبر المعاوقة $2 - j2\ \Omega$ نتيجة لمصدر الجهد $\mathbf{V}_1$. أوجد الجهد $\mathbf{V}_1$ الذى يقابل $\mathbf{V}_0 = 5/0^\circ\ V$.

لمصدر الجهد $\mathbf{V}_0$ يكون تيار الشبيكة هو $\mathbf{I}_3 = \dfrac{\mathbf{V}_0}{2-j2} = \dfrac{5/0^\circ}{2\sqrt{2}/-45^\circ} = 1\cdot76/45^\circ\ A.$ وبالتعبير عنه بصيغة محددة :

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & V_1 \\ -3 & 8+j5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8+j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7-j2 \end{vmatrix}} = V_1 \frac{\begin{vmatrix} -3 & 8+j5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}}{315\angle 16.2^\circ} = V_1\,(0.0476\angle -16.2^\circ)\ A$$

إذن : $V_1 = \dfrac{I_3}{0.0476\angle -16.2^\circ} = \dfrac{1.76\angle 45^\circ}{0.0476\angle -16.2^\circ} = 36.9\angle 61.2^\circ\ V$



شكل ٩ — ١٩ شكل ٩ — ١٨

٩ — ١٦ عند توصيل الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ — ١٩ بحمل معاوقته كبيرة فإن الجهد يعطى بالهبوط فى الجهد على المعاوقة $5 - j5\Omega$ ·عين دالة انتقال الجهد V_0/V_i للشبكة الكهربائية .

إن معادلتى تيارى الشبيكة الموضحين فى الشكل على الصيغة المصفوفية هما

$$\begin{bmatrix} 5 & -(5+j5) \\ -(5+j5) & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

والجهد الخارج V_0 هو

$$V_0 = I_2(5-j5) = (5-j5)\frac{\begin{vmatrix} 5 & V_i \\ -(5+j5) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -(5+j5) \\ -(5+j5) & 10 \end{vmatrix}} = \frac{(5-j5)(5+j5)V_i}{(50-j50)} = \frac{50V_i}{50\sqrt{2}\angle -45^\circ}$$

ومنه نجد

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{50}{50\sqrt{2}\angle -45^\circ} = 0.707\angle 45$$

٩ — ١٧ تحتوى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ — ٢٠ على مصدرين للجهد — أوجد التيار المار فى المعاوقة $2 + j3\,\Omega$ نتيجة وجود كل من المصدرين .

نختار تيارات الشبكة بحيث يعطى التيار المطلوب المار فى المعاوقة بتيار الشبيكة I_2 مباشرة . وتكون معادلة تيارات الشبيكة المختارة فى الصيغة المصفوفة هى

$$\begin{bmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\angle 0^\circ \\ 0 \\ -20\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

شكل ٩ — ٢٠

محددة المعاوقة هي

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 70 + j620 = 624\angle 83{\cdot}55^\circ$$

بفك محددة البسط للتيار $\mathbf{I}_2$ من خلال عناصر العمود الثاني نجد أن

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 30\angle 0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & -6 \\ 0 & -20\angle 0^\circ & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 30\angle 0^\circ\,(-)\frac{\begin{vmatrix} -j5 & -6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} + 0 + (-20\angle 0^\circ)(-)\frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 0 \\ -j5 & -6 \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

$$= -30\angle 0^\circ\left(\frac{50\angle -90^\circ}{624\angle 83{\cdot}55^\circ}\right) + 20\angle 0^\circ\left(\frac{42{\cdot}4\angle -135^\circ}{624\angle 83{\cdot}55^\circ}\right) = 2{\cdot}41\angle 6{\cdot}45^\circ + 1{\cdot}36\angle 141{\cdot}45^\circ \text{ A}$$

وعلى ذلك فإنه ينتج عن المصدر $\mathbf{V}_1$ تيار $2.41\angle 6.45^\circ$ A في المعاوقة $2 + j3\ \Omega$ ، وينتج عن المصدر $\mathbf{V}_2$ تيار $1.36\angle 141.45^\circ$ A في نفس المعاوقة . وينتج من ذلك أن هذين التيارين هما مركبتا $\mathbf{I}_2$

$$\mathbf{I}_2 = 2{\cdot}41\angle 6{\cdot}45^\circ + 1{\cdot}36\angle 141{\cdot}45^\circ = 1{\cdot}74\angle 40{\cdot}1^\circ \text{ A.}$$

٩ – ١٨ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ – ٢٠ عين (أ) القدرة المعطاة بكل مصدر للجهد .
(ب) القدرة في مقاومات الشبكة .

(أ) التيار المار في الفرع الذي يحتوي على $\mathbf{V}_1$ هو

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 30\angle 0^\circ & -j5 & 0 \\ 0 & 8+j8 & -6 \\ -20\angle 0^\circ & -6 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{2240\angle 53{\cdot}8^\circ}{624\angle 83{\cdot}55^\circ} = 3{\cdot}59\angle -29{\cdot}75^\circ \text{ A}$$

والقدرة المعطاة لهذا المصدر هي $P_1 \cdot V_1 I_1 \cos\theta \quad 30(3{\cdot}59)\cos 29{\cdot}75^\circ \quad 93{\cdot}5$ W

التيار المار في الفرع الذي يحتوي على $\mathbf{V}_2$ هو

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 & 30\angle 0^\circ \\ -j5 & 8+j8 & 0 \\ 0 & -6 & -20\angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{860\angle -125{\cdot}6^\circ}{624\angle 83{\cdot}55^\circ} = 1{\cdot}38\angle -209{\cdot}15^\circ \text{ A}$$

لاحظ أن $\mathbf{V}_2$ و $\mathbf{I}_3$ ليس في اتجاه واحد . وعلى هذا فإن القدرة المعطاة بهذا المصدر هي

$$P_2 = V_2(I_3)\cos\theta = (-)(20)(1{\cdot}38)\cos -209{\cdot}15^\circ = 24{\cdot}1 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هي $P_T = P_1 + P_2 = 93{\cdot}5 + 24{\cdot}1 = 117{\cdot}6$ W

(ب) – القدرة في المقاومة 5Ω هي $P_5 = (I_1)^2 5 = (3{\cdot}59)^2 5 = 64{\cdot}5$ W وفي المقاومة 2Ω هي $P_2 = (I_2)^2 2 = (1{\cdot}74)^2 2 = 6{\cdot}05$ W وبما أن التيار المار في فرع المقاومة 6Ω هو

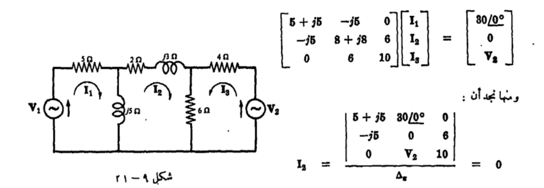
$$(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) = (1{\cdot}33 + j1{\cdot}12) - (-1{\cdot}205 + j0{\cdot}672) = 2{\cdot}535 + j0{\cdot}45 = 2{\cdot}57\angle 10{\cdot}1^\circ \text{ A}$$

إذن $P_6 = (2{\cdot}57)^2\, 6 = 39.6$ W . والقدرة في المقاومة $4\ \Omega$ هي $P_4 = (I_3)^2 4 = (1{\cdot}38)^2 4 = 7{\cdot}61$ W

إذن القدرة الكلية هي $P_T = 64{\cdot}5 + 6{\cdot}05 + 39{\cdot}6 + 7{\cdot}61 = 117{\cdot}76$ W

٩ – ١٩ تحتوى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ – ٢١ على مصدرين للجهد V_1 و V_2 فإذا كان $V_1 = 30\underline{/0^\circ}V$ فعين V_2 بحيث يكون التيار المار فى المعاوقة $2 + j3\ \Omega$ مساوياً للصفر .

نختار تيارات الشبكة كما هو موضح وبحيث يمر فى المعاوقة $2 + j3\ \Omega$ تيار واحد فقط . وبذلك فإن المعادلات الناتجة فى الصيغة المصفوفية هى :



$$\begin{bmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\underline{/0^\circ} \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن :

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 30\underline{/0^\circ} & 0 \\ -j5 & 0 & 6 \\ 0 & V_2 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

شكل ٩ – ٢١

وبالفك نحصل على :

$$-30\underline{/0^\circ}\begin{vmatrix} -j5 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - V_2\begin{vmatrix} 5+j5 & 0 \\ -j5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$-30\underline{/0^\circ}\,(50\underline{/-90^\circ}) - V_2\,(6)(5\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ}) = 0$$

و

$$V_2 = \frac{-30\underline{/0^\circ}\,(50\underline{/-90^\circ})}{6(5\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ})} = 35{\cdot}4\underline{/45^\circ}\ V$$

حـل آخر : إذا كان لا يمر تيار فى الفرع $2 + j3\ \Omega$ أى أن I_2 يساوى صفراً فإن الهبوط فى الجهد على المانعة $j\,5\Omega$ يساوى الهبوط فى الجهد على المقاومة $6\ \Omega$. أى أن

$$I_1(j5) = I_3(6)$$

وبالتعويض نحصل على $I_1 = 30\underline{/0^\circ}/(5+j5)$ و $I_3 = V_2/10,$

$$\frac{30\underline{/0^\circ}}{5+j5}(j5) = \frac{V_2}{10}(6)$$ ومنها نجد : $$V_2 = \frac{30\underline{/90^\circ}}{\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ}}\left(\frac{10}{6}\right) = 35{\cdot}4\underline{/45^\circ}\ V$$

٩ – ٢٠ إذا كان فى الشكل ٩ – ٢١ $V_2 = 20\underline{/0^\circ}V$. عين مصدر الجهد V_1 الذى ينتج عنه عدم مرور تيار فى الفرع المحتوى على V_2 .

باختيار تيارات الشبكة الموضحة فى الشكل ٩ – ١٩ وبمساواة محددة I_3 بالصفر فإن :

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 & V_1 \\ -j5 & 8+j8 & 0 \\ 0 & 6 & 20\underline{/0^\circ} \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

وبالفعل نحصل على :

$$V_1 \begin{vmatrix} -j5 & 8+j8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 20\angle 0^\circ \begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 \\ -j5 & 8+j8 \end{vmatrix} = 0$$

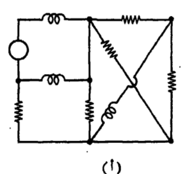
و

$$V_1 (30\angle -90^\circ) + 20\angle 0^\circ (25 + j80) = 0$$

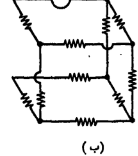
$$V_1 = \frac{-20\angle 0^\circ (25 + j80)}{30\angle -90^\circ} = 55.8\angle -17.4^\circ \text{ V}$$

مسائل اضافية

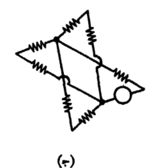
٩ – ٢١ عين عدد تيارات الشبيكة اللازمة لحل الشبكات الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ – ٢٢ (أ – و) وذلك بتطبيق طريقتين مختلفتين .
الجواب : (أ) 5 ، (ب) 4 ، (جـ) 3 ، (د) 4 ، (هـ) 4 ، (و) 5



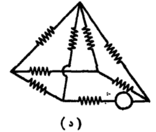
(أ)



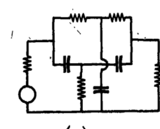
(ب)

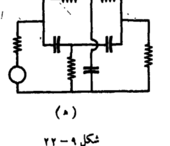


(جـ)



(د)





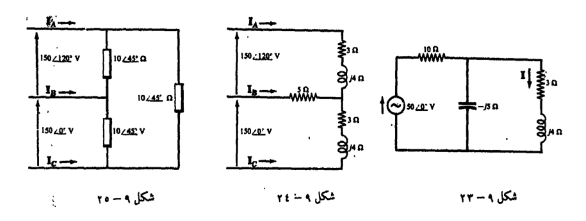
(هـ)



(و)

شكل ٩ – ٢٢

٩ – ٢٢ أوجد التيار المار فى المقاومة 3Ω فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ – ٢٣ علماً بأن الاتجاه الموجب كما هو موضح فى الشكل . الجواب : $4.47\angle{-63.4^\circ}\ A$



شكل ٩ – ٢٥ شكل ٩ – ٢٤ شكل ٩ – ٢٣

٩ – ٢٣ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ٩ – ٢٤ أوجد التيارات I_A و I_B و I_C

الجواب : $I_A = 12{\cdot}1\angle{46{\cdot}4^\circ}\ A,\ I_B = 19{\cdot}1\angle{-47{\cdot}1^\circ}\ A,\ I_C = 22{\cdot}1\angle{166{\cdot}4^\circ}\ A$

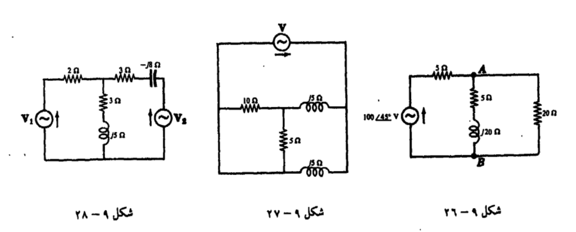
٩ – ٢٤ فى الشكل ٩ – ٢٥ أوجد التيارات الثلاث I_A و I_B و I_C

الجواب : $26\angle{45^\circ}\ A,\ 26\angle{-75^\circ}\ A,\ 26\angle{-195^\circ}\ A$

٩ – ٢٥ باستخدام طرق تيار الشبكية – أوجد الجهد V_{AB} فى الدائرة الموضحة فى الشكل ٩ – ٢٦ .
الجواب : $V_{AB} = 75.4\angle{55.2^\circ}\ V$

٩ – ٢٦ فى الشكل ٩ – ٢٧ – أوجد القيمة الفعالة لمصدر الجهد V الذى يعطى قدرة $100\ W$ فى المقاومة 5Ω .
الجواب : $40.3\ V$

٩ – ٢٧ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ – ٢٨ – ا حسب Δ_z وذلك بفرض اختيار ما لتيارات الشبكية . اعتبر اختياراً آخر لتيارات الشبكية – ثم احسب مرة أخرى Δ_z . الجواب : $61 - j\,15\ \Omega^2$



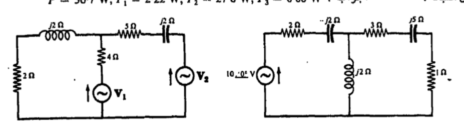
شكل ٩ – ٢٨ شكل ٩ – ٢٧ شكل ٩ – ٢٦

٩ – ٢٨ إذا كان كل من V_1 و V_2 فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ – ٢٨ يساوى $50/0^\circ\ V$ ، فما القدرة التى يعطيها كل منهما للشبكة ؟ كرر نفس الشئ مع عكس اتجاه مصدر V_2 .

الجواب : $P_1 = 191\ W, P_2 = 77.1\ W; P_1 = 327\ W, P_2 = 214\ W$

٩ – ٢٩ فى الشبيكتين الفرعيتين للشبكة الموضحة فى الشكل ٩ – ٢٩ أوجد القدرة التى يعطيها المصدر وكذلك قدرة كل مقاومة فى الشبكة .

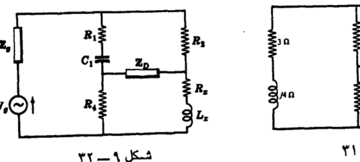
الجواب : $P = 36.7\ W, P_1 = 2.22\ W, P_2 = 27.8\ W, P_3 = 6.66\ W$



شكل ٩ — ٣٠ شكل ٩ — ٢٩

٩ – ٣٠ فى الشكل ٩ – ٣٠ إذا كان V_1 و V_2 مصدرين متماثلين قيمة كل منهما $10/90^\circ$ volts ، وموجهين كما هو موضح فى رسم الدائرة – أوجد القدرة التى يعطيها كل مصدر للدائرة . الجواب : $P_1 = 11.0\ W, P_2 = 9.34\ W$.

٩ – ٣١ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ٩–٣١ – أوجد التيار المار فى المعاوقة $3 + j4\ \Omega$. الجواب : صفر



شكل ٩ — ٣٢ شكل ٩ — ٣١

٩ – ٣٢ تسمى الدائرة الموضحة فى الشكل ٩–٣٢ بقنطرة هاى – اكتب معادلات تيارات الشبكة فى الصيغة المصفوفية بحيث تختار تيارا واحدا فقط يمر فى Z_D ، ثم عبر عن التيار المار فى Z_D على صيغة محددة وساويها بالصفر . أوجد R_x و L_x بدلالة الثوابت الأخرى للقنطرة .

الجواب

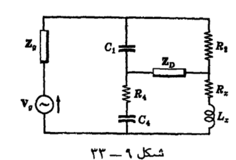
$$R_x = \frac{\omega^2 C_1^2 R_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}, \quad L_x = \frac{C_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}$$

٩ – ٣٣ تسمى الدائرة الموضحة فى الشكل ٩ – ٣٣ بقنطرة اون . أوجد R_x و L_x بدلالة الثوابت الأخرى للقنطرة ، وذلك عندما يكون التيار فى Z_D مساويا للصفر .

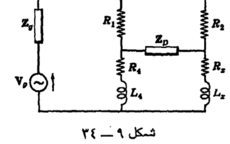
الجواب : $R_x = \frac{C_1}{C_4} R_2, \quad L_x = C_1 R_2 R_4$

٣٤ – الدائرة الموضحة فى الشكل ٩–٣٤ هى قنطرة المقارنة بين حث الملفات المختلفة . اختر تيارات الشبيكة ثم اكتب معادلاتها فى الصيغة المصفوفية . أوجد R_x و L_x عندما يكون التيار فى Z_D مساويا للصفر .

الجواب $R_x = \frac{R_2}{R_1} R_4, \; L_x = \frac{R_2}{R_1} L_4$



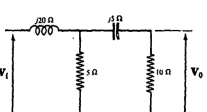
شكل ٩ — ٣٣



شكل ٩ — ٣٤

٣٥ – أوجد دالة انتقال الجهد V_0/V_i عبر الشبكة الموضحة فى الشكل ٩–٣٥ . الجواب : $0.139\angle 90^\circ$

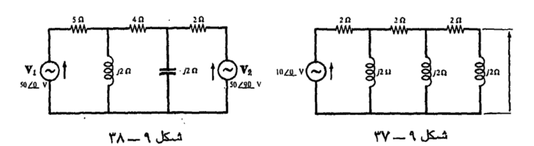
شكل ٩ — ٣٥



شكل ٩ — ٣٦

٣٦ أوجد دالة انتقال الجهد V_0/V_i عبر الشبكة الموضحة فى الشكل ٩–٣٦ . الجواب : $0.159\angle -61.4^\circ$

٣٧ فى الشبكة الموضحة فى الشكل ٩–٣٧ ، أوجد V_0 بالقطبية الموضحة . الجواب : $1.56\angle 128{\cdot}7^\circ\ V$



شكل ٩ — ٣٨

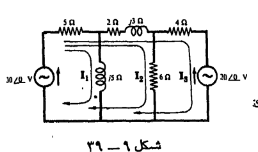
شكل ٩ — ٣٧

٣ أوجد القدرة فى كل من المقاومات الثلاث فى الشبكة الموضحة فى الشكل ٩–٣٨ .

الجواب : 471 W, 47·1 W, 471 W

٩ – ٣٩ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩ – ٣٨ أوجد القدرة المعطاة بكل مصدر جهد .

الجواب : $P_1 = 422$ W, $P_2 = 565$ W



شكل ٩ – ٣٩

٩ – ٤٠ فى الشبكة الموضحة فى الشكل ٩–٣٩ أوجد تيار الشبيكة الفرعية I_3 وذلك لاختيار تيارات الشبيكة المعطى .

الجواب : $1.38\angle -209.15°$A

٩ – ٤١ أوجد التيار I_3 فى الشبكة الموضحة فى الشكل ٩–٤٠ .

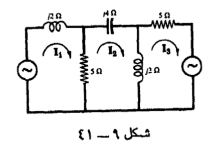
الجواب : $11.6\angle 113.2°$ A

٩ – ٤٢ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ٩–٤٠ – أوجد نسبة التيار I_1/I_3 .

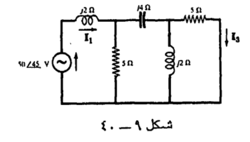
الجواب : $-j\ 3.3$

٩ – ٤٣ فى الشبكة المعطاة بالشكل ٩–٤١ ، موضح بها تيارات الشبيكة الثلاثة فى المسارات المغلقة الأولية . احسب معاوقتى الانتقال Z_{13} و Z_{31}

الجواب : $4.3\angle -68.2°\Omega$



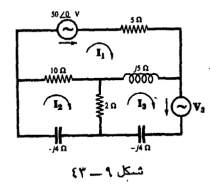
شكل ٩ – ٤١



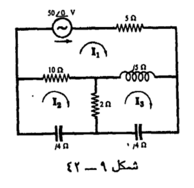
شكل ٩ – ٤٠

٩ – ٤٤ لتيارات الشبيكات الفرعية الثلاث للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ٩–٤٢ – أوجد المعاوقات Z_{13} و Z_{12} و Z_{input}

الجواب : $20.2\angle 36.1°\ \Omega$, $17.4\angle 71.6°\ \Omega$, $6.82\angle -82.9°\ \Omega$



شكل ٩ – ٤٣



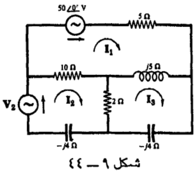
شكل ٩ – ٤٢

٩ – ٤٥ الشكل ٩ – ٤٣ هو الشكل ٩ – ٤٢ بعد إضافة مصدر الجهد V_3 . أوجد قيمة V_3 التى تجعل التيار I_1 مساويا للصفر.

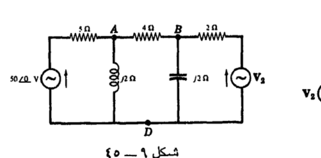
الجواب : $16.8\angle 133.2°$ V

٩ – ٤٦ الشكل ٩–٤٤ هو الشكل ٩–٤٢ بعد إضافة مصدر الجهد V_2 . أوجد قيمة V_2 التى تجعل التيار I_1 مساويا للصفر .

الجواب : $42.9\angle 144.5^\circ V$



شكل ٩ – ٤٤



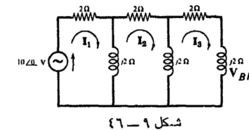
شكل ٩ – ٤٥

٩ – ٤٧ فى الكشبة الموضحة فى الشكل ٩–٤٥ أوجد قيمة V_2 التى تجعل التيار المار خلال المقاومة $4\ \Omega$ مساويا للصفر .

الجواب : $26.3\angle 113.2^\circ V$

٩ – ٤٨ فى الشبكة الموضحة فى الشكل ٩–٤٥ أوجد قيمتى V_{AD} ، V_{BD} عندما تكون قيمة $V_2 = 26.3\angle 113.2^\circ$ volts.

الجواب : $V_{AD} = V_{BD} = 18.5\angle 68.1^\circ$ V



شكل ٩ – ٤٦

٩ – ٤٩ فى الشبكة الموضحة فى الشكل ٩–٤٦ ولاختيار تيارات الشبيكة الموضح – أوجد معاوقة الانتقال Z_{13} . ثم أوجد I_3 باستخدام معاوقة الانتقال هذه .

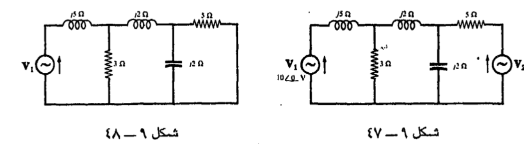
الجواب : $12.8\angle 38.7^\circ\ \Omega,\ 0.782\angle 38.7^\circ\ \Omega$

٩ – ٥٠ فى الشبكة الموضحة فى الشكل ٩–٤٧ – أوجد قيمة V_2 التى تجعل تيار المصدر V_2 مساويا للصفر .

الجواب : $V_2 = 4\angle 180^\circ V$

٩ – ٥١ فى الشبكة الموضحة فى الشكل ٩–٤٨ – أوجد مقدار مصدر الجهد V_1 الذى ينتج عنه قيمة فعالة للجهد عبر المقاومة 5Ω مساوية 20 volts.

الجواب : $69.1\ V$



شكل ٩ – ٤٧

شكل ٩ – ٤٨

الفصل العاشر

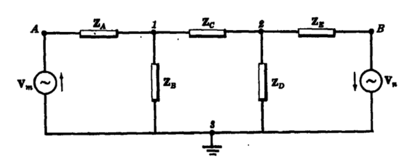
تحليل الشبكات بطريقة جهد العقدة

مقدمة :

استعرضنا فى الفصل التاسع طريقة اختيار مسارات التيار المغلقة وتطبيق قانون كيرشوف للجهد ، وذلك لحل الشبكات الكهربائية بطريقة تيارات الشبكات الفرعية . وفى هذا الفصل سنحصل على نفس الحل عن طريقة مجموعة المعادلات الناتجة عن تطبيق قانون كيرشوف للتيار . وتسمى هذه بطريقة جهد العقدة .

جهود العقدة :

العقدة هى نقطة مشتركة فى الشبكة الكهربية لعنصرين أو أكثر من عناصر الدائرة . وإذا اتصل ثلاثة عناصر أو أكثر عند عقدة ما ، فإن هذه العقدة ، تسمى بالعقدة الأساسية أو بنقطة اتصال . ويرمز لكل عقدة فى الدائرة بعدد أو بحرف . وفى الشكل ١٠-١ نجد أن 3 ,2 ,1 و A, B ترمز إلى عقدة ويرمز 3 ,2 ,1 إلى عقدة أساسية أو نقط اتصال . وجهد العقدة هو جهد عقدة مفروضة بالنسبة لعقدة معينة تسمى عقدة الاسناد . وفى الشكل ١٠-١ إذا اخترنا العقدة 3 كعقدة اسناد ، فإن V_{13} يمثل الجهد بين العقدتين 1 ,3 ، V_{23} يمثل الجهد بين العقدتين 2 ,3 . وبما أن جهد العقد يحدد دائما بالنسبة لعقدة الإسناد فإننا نستخدم الرموز V_1 و V_2 بدلا من V_{13} و V_{23} على الترتيب .

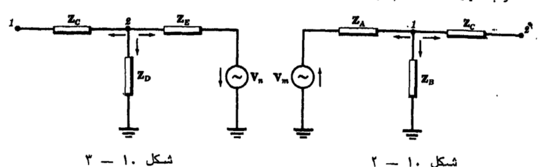


شكل ١٠ — ١ عقد الشبكة الكهربائية .

وتعتمد طريقة جهد العقدة على إيجاد كل جهود العقد الأساسية بالنسبة لعقدة الإسناد . وبتطبيق قانون كيرشوف للتيار على نقطتى الاتصال 2 و 1 فإننا نحصل على معادلتين فى المجهولين V_2 و V_1 . وفى الشكل ١٠-٢ أعيد رسم العقدة 1 مع توضيح جميع الأفرع المتصلة بها ، ونفرض أن كل تيارات الأفرع خارجة من العقدة ، وبما أن مجموع التيارات الخارجة من نقطة اتصال يساوى صفرا فإن :

$$\frac{V_1 - V_m}{Z_A} + \frac{V_1}{Z_B} + \frac{V_1 - V_2}{Z_C} = 0 \qquad (١)$$

واتجاه التيارات فى المعادلة (١) اتجاه اختيارى . أنظر المسألة ١٠ – ١ .



شكل ١٠ — ٣ شكل ١٠ — ٢

وبتكرار نفس الطريقة للعقدة 2 تكون المعادلة الناتجة هى :

$$\frac{V_2 - V_1}{Z_C} + \frac{V_2}{Z_D} + \frac{V_2 + V_n}{Z_E} = 0 \qquad (٢)$$

وبترتيب الحدود فى المعادلتين (١) ، (٢) فإن مجموعة المعادلتين تكون

$$\left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}\right)V_1 - \left(\frac{1}{Z_C}\right)V_2 = \left(\frac{1}{Z_A}\right)V_m$$
$$-\left(\frac{1}{Z_C}\right)V_1 + \left(\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_D} + \frac{1}{Z_E}\right)V_2 = -\left(\frac{1}{Z_E}\right)V_n \qquad (٣)$$

وبما أن $Y = 1/Z$ ، فإن مجموعة المعادلات (٣) يمكن إعادة كتابتها بالنسبة للمساحات كالآتى :

$$(Y_A + Y_B + Y_C)V_1 - Y_C V_2 = Y_A V_m$$
$$-Y_C V_1 + (Y_C + Y_D + Y_E)V_2 = -Y_E V_n \qquad (٤)$$

عدد معادلات جهد العقدة :

باستثناء عقدة الإسناد فإنه يمكننا كتابة المعادلات عند كل عقدة أساسية فى الشبكة الكهربائية . « وعلى ذلك فإن عدد المعادلات المطلوبة يكون أقل من عدد العقد الأساسية بواحد » . ويعتمد اختيار الطريقة الأنسب من بين طريقتى تيار الشبكة وجهد العقدة لحل شبكة كهربائية معطاة على تركيب الشبكة نفسها . وإذا كانت الشبكة الكهربائية تحتوى على عدة أفرع متصلة على التوازى فسيكون لها عدد من المسارات المغلقة أكثر من عدد العقد ، ولذلك فهى تحتاج عددا أقل من معادلات العقدة لحلها . أنظر المسألة ٩–٦ فى الفصل التاسع والمسألة ١٠–٤ . وفى حالات أخرى يكون عدد المسارات المغلقة مساويا لعدد العقد أو يكون عدد العقد أكبر من عدد المسارات المغلقة وعلى ذلك فإنه يجب حل كل شبكة كهربائية بالطريقة التى تعطينا أقل عدد من المعادلات .

معادلات العقد عن طريق الفحص :

تحتاج الشبكة الكهربائية التى بها أربع عقد أساسية إلى ثلاث معادلات عقد لحلها وهذه المعادلات تكتب عموما بالصيغة :

$$Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 = I_1$$
$$Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 = I_2 \qquad (٥)$$
$$Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3 = I_3$$

وتسمى Y_{11} بالمسامحة الذاتية للعقدة 1 ، وتعطى بمجموع جميع المسامحات المتصلة بالعقدة 1. وبالمثل تسمى Y_{22} و Y_{33} بالمسامحتين الذاتيتين للعقدتين 2 و 3 ، وتعطيان بمجموع جميع المسامحات المتصلة بالعقدة المقابلة لكل منهما .

تسمى Y_{12} بالمسامحة التبادلية بين العقدتين 1 و 2 وتعطى بمجموع كل المسامحات المتصلة بالعقدتين 1 و 2 . Y_{12} لها إشارة سالبة كما هو واضح من المعادلة الأولى من (٤) . وبالمثل فإن Y_{23} و Y_{13} هما المسامحتان التبادليتان للعناصر المتصلة بالعقدتين (2 و 3) ، (1 و 3) على الترتيب . وكل المسامحات التبادلية لها إشارات سالبة . لاحظ أن

$$Y_{13} = Y_{31}, Y_{23} = Y_{32}$$

I_1 هو مجموع كل تيارات المصدر عند العقدة 1 . وإشارة التيار الداخل إلى العقدة موجبة بينما إشارة التيار الخارج من العقدة سالبة . I_2 و I_3 هما مجموعا التيارات عند العقدتين 2 و 3 على الترتيب .

وكما في الصيغة المصفوفية لمعادلات تيار الشبكة (الفصل التاسع) فإن معادلات العقد الثلاث في (٥) تكتب بالصيغة المصفوفية .

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \qquad (٦)$$

وتعطى جهود العقد V_1 و V_2 ، V_3 بالمعادلات :

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & Y_{12} & Y_{13} \\ I_2 & Y_{22} & Y_{23} \\ I_3 & Y_{32} & Y_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Y} , \quad V_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & I_1 & Y_{13} \\ Y_{21} & I_2 & Y_{23} \\ Y_{31} & I_3 & Y_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Y} , \quad V_3 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & I_1 \\ Y_{21} & Y_{22} & I_2 \\ Y_{31} & Y_{32} & I_3 \end{vmatrix}}{\Delta_Y}$$

وعند فك محددة كل بسط بالنسبة لعناصر العمود المحتوى على التيار فإننا نحصل على معادلات جهود العقد الآتية :

$$V_1 = I_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right) + I_2\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y}\right) + I_3\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Y}\right) \qquad (٧)$$

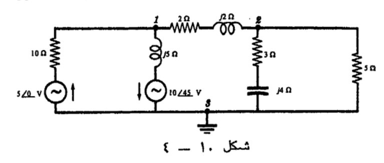
$$V_2 = I_1\left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_Y}\right) + I_2\left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_Y}\right) + I_3\left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_Y}\right) \qquad (٨)$$

$$V_3 = I_1\left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_Y}\right) + I_2\left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_Y}\right) + I_3\left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_Y}\right) \qquad (٩)$$

وحدود الأطراف اليمنى في المعادلات (٧) ، (٨) ، (٩) هي المركبات المطاورة الناتجة من التيارات المختلفة . وعلى ذلك ففي المعادلة (٧) نجد أن V_1 هو مجموع $I_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)$ الناتج عن التيار I_1 و $I_2(\Delta_{21}/\Delta_Y)$ الناتج عن التيار I_2 و $I_3(\Delta_{31}/\Delta_Y)$ الناتج عن التيار I_3

مثال :

اكتب معادلات جهد العقدة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠-٤ ثم عبر عنها بالصيغة المصفوفية .



شكل ١٠ — ٤

نختار العقدة 3 عقدة اسناد والعقدتين 1 و 2 كما هو موضح فى شكل الدائرة ونفرض أن تيارات كل الأفرع خارجة من العقدتين 1 و 2 . وبتطبيق كيرشوف للتيار عند كل عقدة نحصل على :

عند العقدة 1 :
$$\frac{V_1 - 5\angle 0^\circ}{10} + \frac{V_1 + 10\angle 45^\circ}{j5} + \frac{V_1 - V_2}{2 + j2} = 0 \qquad (١٠)$$

عند العقدة 2 :
$$\frac{V_2 - V_1}{2 + j2} + \frac{V_2}{3 - j4} + \frac{V_2}{5} = 0 \qquad (١١)$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجـد أن

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2 + j2}\right)V_1 - \left(\frac{1}{2 + j2}\right)V_2 = \frac{5\angle 0^\circ}{10} - \frac{10\angle 45^\circ}{j5} \qquad (١٢)$$

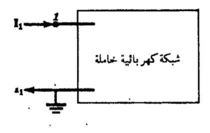
$$-\left(\frac{1}{2 + j2}\right)V_1 + \left(\frac{1}{2 + j2} + \frac{1}{3 - j4} + \frac{1}{5}\right)V_2 = 0 \qquad (١٣)$$

بمقارنة المصفوفة المربعة التى تحتوى على المساحة Y_{11} بالمعادلة (٦) نجـد أن $Y_{11} = 1/10 + 1/j5 + 1/(2 + j2)$ siemens وهذا يؤكد تعريف Y_{11} كمساحة ذاتية للعقدة . ونجد أيضا أن $Y_{12} = Y_{21} = -1/(2 + j2)$ siemens تتفق مع تعريف المساحة التبادلية .

يعرف I_1 عموما بأنه مجموع جميع التيارات عند العقدة 1 . وعلى حسب اختيار الإشارات فإن التيار الناتج عن مصدر الفرع الأيسر يتجه إلى العقدة 1 وعلى ذلك فإشاراته موجبة ، بينما يخرج التيار الناتج عن مصدر الفرع الثانى من العقدة 1 وعلى ذلك فإشارته سالبة . إذن $I_1 = (5\angle 0^\circ)/10 - (10\angle 45^\circ)/j5$ amperes والتيار I_2 عند العقدة 2 يساوى صفر لعدم وجود أى مصدر فى الأفرع المتصلة بالعقد 2

المسامحة المحركة :

أعتبر الشبكة الكهربائية الخاملة ذات النهايتين الخارجيتين والموضحة فى الشكل ١٠-٥ . افرض أن تيار المصدر يتجه إلى العقدة 1 وأن أى مساحة متصلة بالمصدر هى داخل الشبكة الكهربائية .



شكل ١٠ — ٥

بما أنه لا يوجد أى مصدر آخر للتيار داخل الشبكة الكهربائية فإن معادلة V_1 هى :

$$V_1 = I_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right) \qquad (١٤)$$

وتعرف المساحة المحركة أو Y_{input} بأنها النسبة بين التيار الخارج من مصدر التيار الوحيد الموجود بين عقدتين والهبوط فى الجهد الناتج بين العقدتين . إذن من المعادلة (١٤) نجـد أن

$$Y_{input\,1} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}}$$

وتعرف مساحة الدخول لشبكة كهربائية حية بأنها المساحة التى تعطيها لنا الشبكة الكهربائية من خلال نهايتين محددتين وذلك مع وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر . إذن :

$$V_1 = I_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y}\right) + (0)\left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Y}\right) + \cdots = I_1\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y}\right)$$

أو

$$Y_{input\,1} = I_1/V_1 = \Delta_Y/\Delta_{11}$$

وعلى ذلك فإن تعريف Y_{input} يطبق للشبكات الكهربائية النشطة والخاملة .

مسامحة الانتقال :

تنتج عن التيار المار عند عقدة ما فى الشبكة الكهربائية جهود عند كل العقد بالنسبة لعقدة الإسناد . وعلى ذلك فإن مسامحة الانتقال هى النسبة بين التيار المار عند عقدة ما والجهد الناتج عند عقدة أخرى مع فرض أن جميع المصادر الأخرى مساوية للصفر .

فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠-٦ ، يعطى التيار I_r عند العقدة r والجهد الناتج عند العقدة s بالمعادلة .

$$V_s = (0)\left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_Y}\right) + \cdots + I_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_Y}\right) + \cdots + (0)\left(\frac{\Delta_{ss}}{\Delta_Y}\right) = I_r\left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_Y}\right)$$

شكل ١٠ — ٦

إذن

$$Y_{transfer\,rs} = I_r/V_s = \Delta_Y/\Delta_{rs}$$

لاحظ أننا اخترنا نقطة رجوع التيار كعقدة إسناد . وهذا الاختيار ضرورى وإلا فإن التيار سيظهر فى أكثر من حد فى معادلة V_s وبذلك يكون تعريف $Y_{transfer}$. غير صحيح .

باستخدام المسامحة المحركة ومسامحة الانتقال نحصل على مجموعة المعادلات الآتية للجهود V_1 و V_2 و V_3 لشبكة كهربائية ذات أربع نقط اتصال .

$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{input\,1}} + \frac{I_2}{Y_{transfer\,21}} + \frac{I_3}{Y_{transfer\,31}}$$

$$V_2 = \frac{I_1}{Y_{transfer\,12}} + \frac{I_2}{Y_{input\,2}} + \frac{I_3}{Y_{transfer\,32}}$$

$$V_3 = \frac{I_1}{Y_{transfer\,13}} + \frac{I_2}{Y_{transfer\,23}} + \frac{I_3}{Y_{input\,3}}$$

ويظهر بوضوح تعاريف المسامحة الداخلة ومسامحة الانتقال عندما يؤثر مصدر واحد للتيار فى الشبكة الكهربائية مع وضع المصادر الأخرى مساوية للصفر .

مســـائل محلولة

١٠ - ١ اكتب معادلة العقدة للعقدة 2 الموضحة فى الشكلين ١٠-٧ (أ) ، ١٠-٧ (ب) .

بما أن كل التيارات فى الشكل ١٠-٧ (أ) خارجة من العقدة 2 ، فبمساواة مجموع التيارات الخارجة من العقدة بالصفر نجـد أن

$$(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/j2 + \mathbf{V}_2/10 + (\mathbf{V}_2 + 10\angle 0°)/j5 = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجـد

$$-(1/j2)\mathbf{V}_1 + (1/j2 + 1/10 + 1/j5)\mathbf{V}_2 = -10\angle 0°/j5$$

فى الشكل ١٠-٧ (ب) نجد أن تيار فرع واحد فقط يدخل إلى العقدة 2 بينما يخرج منها تياران وبوضع التيار الداخل إلى العقدة مساويا لمجموع التيارين الخارجين منها نجـد أن :

$$(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)/j2 = \mathbf{V}_2/10 + (\mathbf{V}_2 + 10/\angle 0°)/j5$$

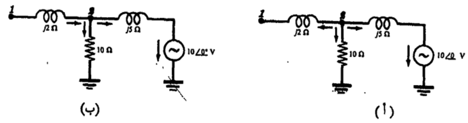
وبإعادة ترتيب الحدود نجـد

$$\mathbf{V}_2/10 + (\mathbf{V}_2 + 10\angle 0°)/j5 + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/j2 = 0$$

أو

$$-(1/j2)\mathbf{V}_1 + (1/j2 + 1/10 + 1/j5)\mathbf{V}_2 = -10\angle 0°/j5$$

وعلى ذلك فإنه يمكننا اختيار أى اتجاه لتيارات الأفرع عند كتابة معادلات العقدة . وفى كل حالة ستكون المعادلات الناتجة متطابقة .



شكل ١٠ — ٧

١٠ - ٢ اكتب معادلات العقدة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠-٨ . ثم عبر عنها بالصيغة المصفوفية .

لدينا ثلاث عقد مرقمة وكذلك عقدة الإسناد كما هو موضح فى الشكل . بفرض أن تيارات جميع الأفرع خارجة من العقد فإنه يمكننا كتابة المعادلات التالية عند العقد 1 و 2 و 3 .

$$(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)/(-j8) + \mathbf{V}_1/5 + (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3 + 10\angle 0°)/(3 + j4) = 0$$
$$(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/(-j8) + \mathbf{V}_2/10 + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3 - 5\angle 0°)/(j4) = 0$$
$$\mathbf{V}_3/8 + (\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1 - 10\angle 0°)/(3 + j4) + (\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2 + 5\angle 0°)/(j4) = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على

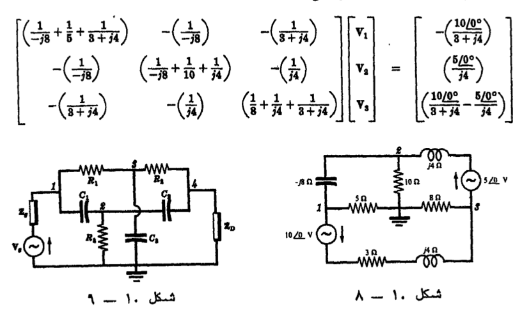
$$\left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3 + j4}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{1}{-j8}\right)\mathbf{V}_2 - \left(\frac{1}{3 + j4}\right)\mathbf{V}_3 = (-10\angle 0°)/(3 + j4)$$

$$-\left(\frac{1}{-j8}\right)\mathbf{V}_1 + \left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{j4}\right)\mathbf{V}_2 - \left(\frac{1}{j4}\right)\mathbf{V}_3 = (5\angle 0°)/(j4)$$

$$-\left(\frac{1}{3 + j4}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{1}{j4}\right)\mathbf{V}_2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{j4} + \frac{1}{3 + j4}\right)\mathbf{V}_3 = \left(\frac{10\angle 0°}{3 + j4}\right) - \left(\frac{5\angle 0°}{j4}\right)$$

ومعادلات العقد فى الصيغة المصفوفية هى

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{-j8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3+j4}\right) & -\left(\frac{1}{-j8}\right) & -\left(\frac{1}{3+j4}\right) \\ -\left(\frac{1}{-j8}\right) & \left(\frac{1}{-j8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{j4}\right) & -\left(\frac{1}{j4}\right) \\ -\left(\frac{1}{3+j4}\right) & -\left(\frac{1}{j4}\right) & \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{j4}+\frac{1}{3+j4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{10/0^\circ}{3+j4}\right) \\ \left(\frac{5/0^\circ}{j4}\right) \\ \left(\frac{10/0^\circ}{3+j4}-\frac{5/0^\circ}{j4}\right) \end{bmatrix}$$



شكل ١٠ ــ ٩ شكل ١٠ ــ ٨

١٠ ــ ٣ اكتب عن طريق الفحص معادلات العقد بالصيغة المصفوفية للشبكةالكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠ــ٩ .

نختار العقد كما هو موضح فى الشكل . فى $[Y]$ نجد أن Y_{11} هى مجموع جميع المساحات المتصلة بالعقد 1, أى $(1/Z_g + 1/R_1 + j\omega C_1)$. Y_{12} و Y_{13} هما سالب مجموع المساحات بالعقدتين (1 و 2) و (1 و 3) ، أى أن $Y_{12} = -(j\omega C_1)$ و $Y_{13} = -(1/R_1)$ على الترتيب . ويمكن تحديد الحدود الأخرى فى $[Y]$ بطريقة مماثلة .

هناك تيار واحد فقط مار فى الشبكة الكهربائية ومتجه ناحية العقدة 1 وعلى ذلك فإشارته موجبة . أى أن $I_1 = V_g/Z_g$.

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_g}+\frac{1}{R_1}+j\omega C_1\right) & -(j\omega C_1) & -\left(\frac{1}{R_1}\right) & 0 \\ -(j\omega C_1) & \left(j\omega C_1+\frac{1}{R_3}+j\omega C_2\right) & 0 & -(j\omega C_2) \\ -\left(\frac{1}{R_1}\right) & 0 & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+j\omega C_3\right) & -\left(\frac{1}{R_2}\right) \\ 0 & -(j\omega C_2) & -\left(\frac{1}{R_2}\right) & \left(\frac{1}{R_2}+j\omega C_2+\frac{1}{Z_D}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g/Z_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

١٠ ــ ٤ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠ ــ ١٠ وضعت قيم المكثفين المتساويين فى السعة C farad وقيمة المقاومة R بحيث كان التيار المار فى المعاوقة Z_D مساويا للصفر . تحت هذا الشرط عين قيم R_x و L_x بدلالة الثوابت الأخرى للدائرة .

نختار العقد كما هو موضح فى الشكل . وباختيار عقدة الإسناد فى طرف ما للمعاوقة Z_D فإن جهد العقدة V_3 يساوى صفرا وبذلك يكون التيار المار فى المعاوقة Z_D مساويا للصفر . وبكتابة معادلات العقد فى الصيغة المصفوفية عن طريق الفحص نجد أن :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_g}+j\omega C+\frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & -\left(\frac{1}{R}\right) \\ -(j\omega C) & \left(j2\omega C+\frac{1}{R_x}+\frac{1}{j\omega L_x}\right) & -(j\omega C) \\ -\left(\frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & \left(j\omega C+\frac{1}{R}+\frac{1}{\mathbf{Z}_D}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و بالتعبير عن $\mathbf{V}_3$ بصيغة محددة و مساواتها بالصفر :

$$\mathbf{V}_3 = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_g}+j\omega C+\frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & \mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g \\ -(j\omega C) & \left(j2\omega C+\frac{1}{R_x}+\frac{1}{j\omega L_x}\right) & 0 \\ -\left(\frac{1}{R}\right) & -(j\omega C) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = 0$$

إذن محدد البسط يساوى صفرا وبفكه بالنسبة لعناصر العمود الثالث نحصل على :

$$(\mathbf{V}_g/\mathbf{Z}_g)\begin{vmatrix} -j\omega C & (j2\omega C + 1/R_x + 1/j\omega L_x) \\ -1/R & -j\omega C \end{vmatrix} = 0$$

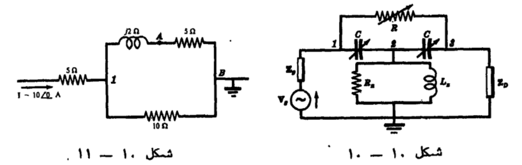
إذن

$$-\omega^2C^2 + j2\omega C/R + 1/(RR_x) + 1/(j\omega L_x R) = 0$$

ومنها نجد أن

$$L_x = 1/(2\omega^2 C) \quad ; \quad R_x = 1/(\omega^2 C^2 R)$$

وهذه هى نفس النتيجة التى حصلنا عليها باستخدام طريقة تيار الشبكة فى المسألة ٩–٦ . لاحظ أن عدد المعادلات اللازمة للحل قد اختصر من أربع إلى ثلاث باستخدام طريقة جهد العقدة .



شكل ١٠ — ١١ .

شكل ١٠ — ١٠

١٠ – ٥ باستخدام طريقة العقدة عين الجهد $\mathbf{V}_{AB}$ فى الشبكة الكهربائية فى الشكل ١٠ – ١١ .

فى وجود عقدتين أساسيتين أو نقطتى اتصال فإننا نحتاج إلى معادلة عقدة واحدة فقط . نختار B كعقدة إسناد ونكتب المعادلة عند العقدة 1 . وبتطبيق قانون كيرشوف للتيار نجد أن التيار $10\angle 0°$ A يساوى التيارات الخارجة . إذن .

$$\mathbf{V}_1 = 10\angle 0/(0{\cdot}281\angle -14{\cdot}2°) = 35{\cdot}6\angle 14{\cdot}2° \text{ V} \quad ، \quad 10\angle 0° = \mathbf{V}_1/10 + \mathbf{V}_1/(5 - j2)$$

بما أن التيار المار فى الفرع $5 + j2\,\Omega$ هو $\mathbf{I} = \mathbf{V}_1/(5 + j2)$ A. فإن الهبوط فى الجهد المطلوب عبر المقاومة $5\,\Omega$ هو :

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}(5) = \frac{\mathbf{V}_1}{(5 + j2)}(5) = \frac{35{\cdot}6\angle 14{\cdot}2^\circ}{(5 + j2)}(5) = 33\angle{-7{\cdot}6^\circ}\ \text{V}$$

١٠ – ٦ عين الجهد $\mathbf{V}_{AB}$ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠–١٢ .

بما أنه لا يوجد فى الدائرة عقدة أساسية ، فإنه إذا اخترنا B كمقدة إسناد والنقطة A كعقدة 1 ، فإنه يمكننا كتابة معادلة ذلك بفرض أن التيار خارج من A فى كلا الفرعين .

$$\frac{\mathbf{V}_1 - 10\angle 0^\circ}{(5+3)} + \frac{\mathbf{V}_1 - 10\angle 90^\circ}{(2+j5)} = 0$$

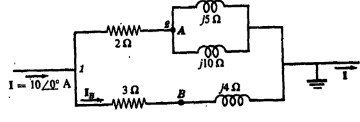
بترتيب الحدود نحصل على :

$$\mathbf{V}_1\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2+j5}\right) = \left(\frac{10\angle 0^\circ}{8} + \frac{10\angle 90^\circ}{2+j5}\right)$$

ومنها نجـد أن $V_{AB} = \mathbf{V}_1 = 11{\cdot}8\angle 55{\cdot}05^\circ$ V.

شكل ١٠ — ١٢

١٠ – ٧ أوجد الجهد $\mathbf{V}_{AB}$ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠–١٣ .



شكل ١٠ — ١٣

إن معادلات العقد هى :

عند العقدة 1 : $10\angle 0^\circ = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)/2 + \mathbf{V}_1/(3 + j4)$

عند العقدة 2 : $(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/2 + \mathbf{V}_2/j5 + \mathbf{V}_2/j10 = 0$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد أن

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4}\right)\mathbf{V}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{V}_2 = 10\angle 0^\circ$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{V}_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{j10}\right)\mathbf{V}_2 = 0$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10\angle 0 & -0.5 \\ 0 & (0.5 - j0.3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.62 - j0.16) & -0.5 \\ -0.5 & (0.5 - j0.3) \end{vmatrix}} = \frac{5.83\angle -31^\circ}{0.267\angle -87.42} = 21.8\angle 56.42^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.62 - j0.16) & 10\angle 0 \\ -0.5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{5\angle 0^\circ}{0.267\angle -87.42^\circ} = 18.7\angle 87.42 \text{ V}$$

جهد العقدة V_2 هو جهد A بالنسبة لعقدة الإسناد . وبما أن $I_B = V_1/(3 + j4)$ ، فإن الجهد V_B بالنسبة لعقدة الإسناد هو

$$V_B = \frac{V_1}{(3 + j4)}(j4) = \frac{21.8\angle 56.42^\circ}{(3 + j4)}(j4) = 17.45\angle 93.32^\circ \text{ V}$$

إذن الجهد المطلوب V_{AB} هو

$$V_{AB} = V_A - V_B = (18.7\angle 87.42^\circ) - (17.45\angle 93.32^\circ) = 2.23\angle 34.1^\circ \text{ V}$$

١٠ – ٨ أوجد فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠–١٤ تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C

نختار العقدة 1 ونقطة الإسناد كما هو موضح فى الشكل . نحل معادلة العقدة .

$$\frac{V_1 + 100\angle 120^\circ}{20} + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - 100\angle 0^\circ}{10} = 0$$

لنحصل على

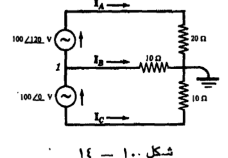
$$V_1 = \frac{200\angle 0^\circ - 100\angle 120^\circ}{5} = 50 - j17.32 = 53\angle -19.1^\circ \text{ V}$$

إذن تيارات الأفرع المختلفة هى

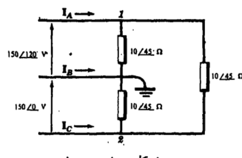
$$I_A = (V_1 + 100\angle 120^\circ)/20 = (50 - j17.32 - 50 + j86.6)/20 = 3.46\angle 90^\circ \text{ A}$$
$$I_B = V_1/10 = 5.3\angle -19.1^\circ \text{ A}$$
$$I_C = (V_1 - 100\angle 0^\circ)/10 = (50 - j17.32 - 100)/10 = 5.3\angle -160.9^\circ \text{ A}$$

لاحظ أن مجموع التيارات الثلاثة الداخلة إلى عقدة الإسناد يساوى صفراً .

$$I_A + I_B + I_C = 3.46\angle 90^\circ + 5.3\angle -19.1^\circ + 5.3\angle -160.9^\circ$$
$$= j3.46 + 5.0 - j1.732 - 5 - j1.732 = 0$$



شكل ١٠ – ١٤



شكل ١٠ – ١٥

١٠ — ٩ أوجد للدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ — ١٥ تيارات الأفرع $\mathbf{I}_A$ و $\mathbf{I}_B$ و $\mathbf{I}_C$.

العقدتان 1 و 2 وعقدة الإسناد جميعها موضحة فى الشكل ١٠—١٥ . إن جهدى العقدة $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ اللذى يمكن قراءتهما من الرسم مباشرة مساويان للجهدين الثابتين المعطيين . إذن

$$\mathbf{V}_2 = -150\angle 0^\circ = 150\angle 180^\circ \text{ V} \quad \text{و} \quad \mathbf{V}_1 = 150\angle 120^\circ \text{ V}$$

وبتطبيق قانون كيرشوف للتيار عند كل عقدة من العقد الثلاث يمكننا حساب التيارات المطلوبة .

عند العقدة 1 :
$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_1}{10\angle 45^\circ} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{10\angle 45^\circ} = \frac{300\angle 120^\circ - 150\angle 180^\circ}{10\angle 45^\circ} = 26\angle 45^\circ \text{ A}$$

عند عقدة الإسناد :
$$\mathbf{I}_B = \frac{-\mathbf{V}_1}{10\angle 45^\circ} - \frac{\mathbf{V}_2}{10\angle 45^\circ} = \frac{150\angle -60^\circ + 150\angle 0^\circ}{10\angle 45^\circ} = 26\angle -75^\circ \text{ A}$$

عند العقدة 2 :
$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_2}{10\angle 45^\circ} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{10\angle 45^\circ} = \frac{300\angle 180^\circ - 150\angle 120^\circ}{10\angle 45^\circ} = 26\angle -195^\circ \text{ A}$$

١٠ — ١٠ عين للدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ — ١٦ القدرة الخارجة من المصدر والقدرة فى كل مقاومة فى الشبكة الكهربائية .

نختار عقدة الإسناد والعقدة 1 كما هو موضح فى الشكل : إذن معادلة العقدة هى

شكل ١٠ — ١٦

$$(\mathbf{V}_1 - 50\angle 0^\circ)/5 + \mathbf{V}_1/j10 + \mathbf{V}_1/(3 - j4) = 0$$

ومنها نجد أن

$$\mathbf{V}_1 = (10\angle 0^\circ)/(0{\cdot}326\angle 10{\cdot}6^\circ) = 30{\cdot}7\angle -10{\cdot}6^\circ \text{ V}$$

وبالحل للحصول على تيارات الأفرع التالية بفرض أن اتجاهها كما هو موضح فى الشكل نحصل على :

$$\mathbf{I}_5 = (50\angle 0^\circ - \mathbf{V}_1)/5 = (50\angle 0^\circ - 30{\cdot}7\angle -10{\cdot}6^\circ)/5 = 4{\cdot}12\angle 15{\cdot}9^\circ \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1/(3 - j4) = (30{\cdot}7\angle -10{\cdot}6^\circ)/(5\angle -53{\cdot}1^\circ) = 6{\cdot}14\angle 42{\cdot}5^\circ \text{ A}$$

والقدرة الخارجة من المصدر .

$$P = VI_5 \cos \theta = (50)(4{\cdot}12) \cos 15{\cdot}9^\circ = 198 \text{ W}$$

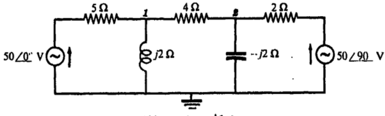
من العلاقة $P = I^2R$ يمكننا حساب القدرة المستنفذة فى كل مقاومة .

$$P_3 = (I_3)^2 3 = (6{\cdot}14)^2 3 = 113 \text{ W} \quad \text{و} \quad P_5 = (I_5)^2 5 = (4{\cdot}12)^2 5 = 85 \text{ W}$$

لاحظ أن القدرة الكلية المعطاة من المصدر تساوى مجموع القدرات المستنفذة بمقاومتى الدائرة ، أى

$$P_T = 85 + 113 = 198 \text{ W.}$$

١ - ١١ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ - ١٧ عين جهدى العقدتين 1 و 2 . بالنسبة لنقطة الإسناد المختارة .



شكل ١٠ — ١٧

بالفحص يمكننا كتابة معادلتى العقدة فى الصيغة المصفوفية :

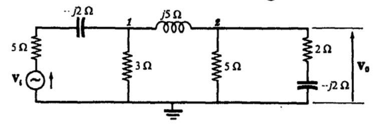
$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{j2}+\frac{1}{4}\right) & -\left(\frac{1}{4}\right) \\ -\left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{-j2}+\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{50\angle 0^\circ}{5}\right) \\ \left(\frac{50\angle 90^\circ}{2}\right) \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن :

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -0.25 \\ j25 & (0.75+j0.5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.45-j0.5) & -0.25 \\ -0.25 & (0.75+j0.5) \end{vmatrix}} = \frac{13.5\angle 56.3^\circ}{0.546\angle -15.95^\circ} = 24.7\angle 72.25^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.45-j0.5) & 10 \\ -0.25 & j25 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{18.35\angle 37.8^\circ}{0.546\angle -15.95^\circ} = 33.6\angle 53.75^\circ \text{ V}$$

—١٢ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠ – ١٨ أوجد النسبة V_0/V_i وذلك بفرض أن V_0 هو الهبوط فى الجهد على المقاومة $2 - j2\ \Omega$ الناتج عن المصدر V_i .



شكل ١٠ — ١٨

نختار العقدتين 1 و 2 وعقدة الإسناد كما هو موضح فى رسم الدائرة . بهذا الاختيار يكون V_0 هو جهد العقدة 1 بالنسبة لعقدة الإسناد .

نكتب معادلات العقدة عن طريق الفحص فى الصيغة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5-j2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{j5}\right) & -\left(\frac{1}{j5}\right) \\ -\left(\frac{1}{j5}\right) & \left(\frac{1}{j5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2-j2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{5-j2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالحل للحصول على V_0 نجد :

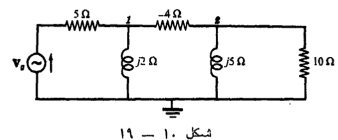
$$V_0 = V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.506 - j0.131) & V_i/(5 - j2) \\ j0.2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.506 - j0.131) & j0.2 \\ j0.2 & (0.45 + j0.05) \end{vmatrix}} = \frac{(0.2\angle -90)V_i/(5 - j2)}{(0.276\angle -7)}$$

إذن :

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{0.2\angle -90}{(5 - j2)(0.276\angle -7)} = 0.1345\angle -61.2$$

تسمى هذه النتيجة بدالة انتقال الجهد وهى تمكننا من حساب الجهد الخارج للفرع المعطى وذلك لأى جهدداخل مباشرة . أى أن $V_0 = V_i(0.1345\angle -61.2)$.

١٠ – ١٣ إذا أعطيت العقدتان 1 و 2 فى الشبكة الكهربائية ١٠ – ١٩ . فأوجد النسبة V_1/V_2 .



شكل ١٠ – ١٩

بكتابة معادلات العقدة فى الصيغة المصفوفية عن طريق الفحص نجد أن :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{4}\right) & -\left(\frac{1}{4}\right) \\ -\left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V_g/5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن :

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} (V_g/5) & -0.25 \\ 0 & (0.35 - j0.2) \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{(V_g/5)(0.403\angle -29.8)}{\Delta_Y}$$

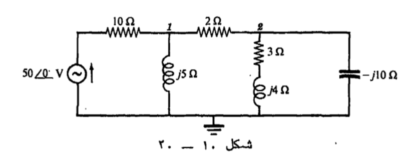
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.45 - j0.5) & (V_g/5) \\ -0.25 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{(V_g/5)(0.25)}{\Delta_Y}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(V_g/5)(0.403\angle -29.8)/\Delta_Y}{(V_g/5)(0.25)/\Delta_Y} = 1.61\angle -29.8$$

حـل آخـر : بالتعبير عن جهد كل عقدة بدلالة العوامل المشتركة . وبما أنه يوجد مصدر واحد بتيار I_1 يؤثر فى الدائرة فإن $V_1 = I_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)$ و $V_2 = I_1(\Delta_{12}/\Delta_Y)$. إذن

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)}{I_1(\Delta_{12}/\Delta_Y)} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = \frac{0.35 - j0.2}{0.25} = 1.61\angle -29.8$$

١٠-١٤ عين جهدى العقدتين 1 و 2 للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠ - ٢٠ باستخدام المساحة الداخلة ومساحة الإنتقال .



شكل ١٠ — ٢٠

تعطى مصفوفة المساحة [Y] عن طريق الفحص بالصورة

$$[Y] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{j5}+\frac{1}{2}\right) & -\left(\frac{1}{2}\right) \\ -\left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3+j4}+\frac{1}{-j10}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0\cdot6)-j0\cdot2) & -0\cdot5 \\ -0\cdot5 & (0\cdot62-j0\cdot06) \end{bmatrix}$$

إذن :

$$Y_{\text{input 1}} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} (0\cdot6-j0\cdot2) & -0\cdot5 \\ -0\cdot5 & (0\cdot62-j0\cdot06) \end{vmatrix}}{(0\cdot62-j0\cdot06)} = \frac{0\cdot194\angle-55\cdot5^\circ}{0\cdot62\angle-5\cdot56^\circ} \qquad 0\cdot313\angle-49\cdot94^\circ\ \text{S}$$

$$Y_{\text{transfer 21}} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{12}} = \frac{0\cdot194\angle-55\cdot5^\circ}{(-1)(-0\cdot5)} = 0\cdot388\angle-55\cdot5^\circ\ \text{S}$$

$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{\text{input 1}}} + \frac{I_2}{Y_{\text{transfer 21}}}$$

عند العقدة 1 :

بما أنه لايوجد تيار عند العقدة 2 ، أى أن $I_2 = 0$ فإننا نحصل على

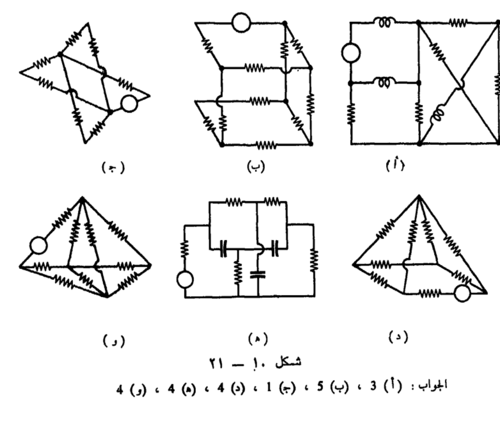
$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{\text{input 1}}} \qquad \frac{(50\angle0^\circ)/10}{0\cdot313\angle-49\cdot94^\circ} = 15\cdot95\angle49\cdot94^\circ\ \text{V}$$

وبالمثل :

$$V_2 = \frac{I_1}{Y_{\text{transfer 12}}} + \frac{I_2}{Y_{\text{input 2}}} \qquad \frac{(50\angle0^\circ)/10}{0\cdot388\angle-55\cdot5^\circ} = 12\cdot9\angle55\cdot5^\circ\ \text{V}$$

مســائل اضــافية

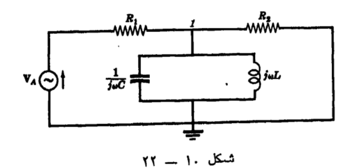
١٠ – ١٥ عين عدد معادلات جهد العقدة اللازمة لحــل كل شبكة من الشبكات الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠ – ٢١ (ا–و) .



شكل ١٠ – ٢١

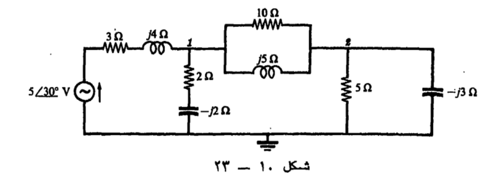
الجواب : (أ) 3 ، (ب) 5 ، (جـ) 1 ، (د) 4 ، (هـ) 4 ، (و) 4

١٠ – ١٦ أكتب معادلة العقدة للعقدة المعطاة فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠ – ٢٢ .



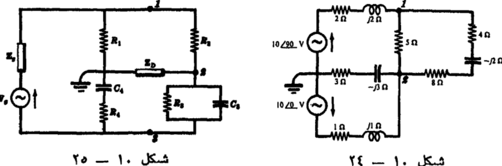
شكل ١٠ – ٢٢

١٠ – ١٧ اكتب معادلات العقــدة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠ – ٢٣ ثم عبر عنها بالصيغة المصفوفية . ثم اكتب $[Y]$ بطريقة الفحص وقارنها بتلك التى تحصل عليها من المعادلات .



شكل ١٠ — ٢٣

١٠ — ١٨ أكتب معادلات العقدة المعطاة فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠ — ٢٤ ثم عبر عنها بالصيغة المصفوفية . ثم أكتب [Y] بطريقة الفحص وقارنها بتلك التى تحصل عليها من المعادلات .

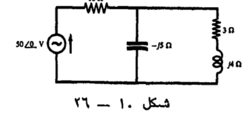


شكل ١٠ — ٢٥ شكل ١٠ — ٢٤

١٠ — ١٩ الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ — ٢٥ قنطرة ڤين أكتب معادلات العقدة الثلاثة لهذه الدائرة ثم ضعها فى الصيغة المصفوفية ، ثم أكتب [Y] بطريقة الفحص وقارنها بتلك التى تحصل عليها من المعادلات .

١٠ — ٢٠ استخدم طريقة العقدة فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠—٢٦ لتحصل على القدرة المعطاة بالمصدر 50 volt والقدرة فى المقاومتين .

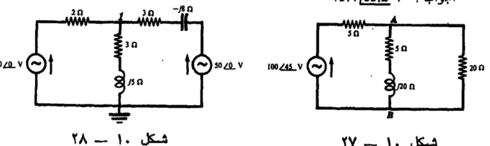
الجواب : 140 W, 80 W, 60 W



شكل ١٠ — ٢٦

١٠ — ٢١ باستخدام طريقة العقدة . أوجد الجهد V_{AB} فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ — ٢٧ .

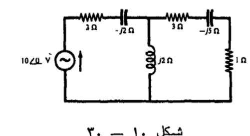
الجواب : $75.4\angle 55.2° \ V$



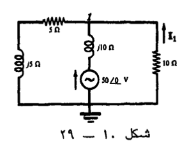
شكل ١٠ — ٢٨ شكل ١٠ — ٢٧

١٠ – ٢٢ أوجد جهد العقدة V_1 فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ – ٢٨ . الجواب $43.9\angle 14.9$ V

١٠ – ٢٣ أوجد الجهد عند العقدة 1 والتيار I_1 للدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ – ٢٩ وذلك بفرض اتجاه I_1 كما هو موضح فى الرسم . الجواب : $17.7\angle 45$ V, $1.77\angle 135$ A



شكل ١٠ – ٣٠

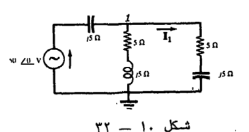


شكل ١٠ – ٢٩

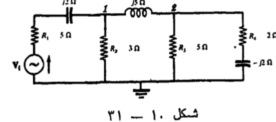
١٠ – ٢٤ باستخدام طريقة العقدة أوجد القدرة المعطاة بالمصدر 10 volts وكذلك القدرة فى كل مقاومة فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ – ٣٠ . الجواب : 2.22 W و 6.66 W و 27.8 W و 36.7 W

١٠ – ٢٥ أوجد القدرة المعطاة للدائرة الموضحة فى الشكل ١٠–٣١ بالمصدر $V_1 = 50\angle 0$ V . عين أيضا القدرة المستنفدة فى كل مقاومة فى الدائرة .

الجواب : $P = 354$ W, $P_1 = 256$ W, $P_2 = 77.1$ W, $P_3 = 9.12$ W, $P_4 = 11.3$ W



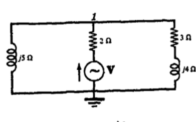
شكل ١٠ – ٣٢



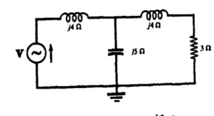
شكل ١٠ – ٣١

١٠ – ٢٦ باستخدام طريقة العقدة – أوجد I_1 فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ – ٣٢ . الجواب : $5\angle 90°$ A

١٠ – ٢٧ أوجد فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ – ٣٢ القيمة الفعالة لجهد المصدر V التى ينتج عنها قدرة 75 W فى المقاومة 3 Ω . الجواب : 24.2 V



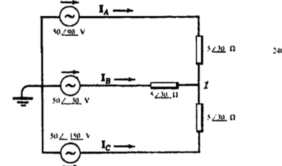
شكل ١٠ – ٣٤



شكل ١٠ – ٣٣

١٠ – ٢٨ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠–٣٤ . أوجد جهد المصدر V الذى ينتج جهدا عند العقدة 1 مساويا $50\angle 0^\circ\ V$
الجواب : $71.6\angle 30.2^\circ\ V$

١٠ – ٢٩ أوجد الجهد عند العقدة 1 للدائرة الموضحة فى الشكل ١٠–٣٥ . الجواب : $179\angle 204.8^\circ\ V$



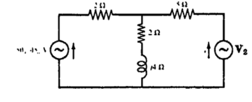
شكل ١٠ — ٣٦

شكل ١٠ — ٣٥

١٠ – ٣٠ أوجد تيارات الأفرع الثلاثة I_A و I_B و I_C وذلك فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ – ٣٦ .
الجواب : $10\angle 180^\circ\ A$ و $10\angle -60^\circ\ A$ و $10\angle 60^\circ\ A$

١٠ – ٣١ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ – ٣٧ أوجد جهد المصدر V_2 الذى ينتج عنه تيار مساو للصفر فى المعاوقة $2 + j4\ \Omega$.
الجواب : $125\angle -135^\circ\ V$

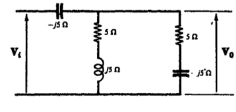
١٠ – ٣٢ بالإشارة إلى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠–٣٧ إذا كان المصدر V_2 هو $100\angle 30^\circ\ V$ فأوجد التيار فى المعاوقة $2 + j4\ \Omega$.
الجواب : $12.1\angle -11^\circ\ A$

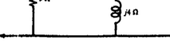


شكل ١٠ — ٣٧

١٠ – ٣٣ فى المسألة ١٠–٣٢ أوجد القدرة المعطاة للشبكة الكهربائية بكل مصدر .
الجواب : $P_1 = -90.6\ W,\ P_2 = 1000\ W$

١٠ – ٣٤ أوجد النسبة I_2/I_1 للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠ – ٣٨ والتى لها تيار I_1 . علما بأن التيار المار فى المقاومة $10\ \Omega$ هو I_2 . الجواب : $0.151\angle 25.8^\circ$





شكل ١٠ — ٣٩

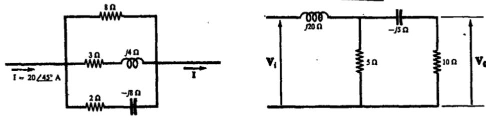
شكل ١٠ — ٣٨

١٠ — ٣٥ باستخدام طريقة العقدة أوجد دالة انتقال الجهد V_0/V_i وذلك للدائرة الموضحة فى الشكل ١٠—٣٩ .

الجواب : $0.707 \angle 45°$

١٠ — ٣٦ أوجد دالة انتقال الجهد V_0/V_i للدائرة الموضحة فى الشكل ١٠—٤٠ .

الجواب : $0.159 \angle -61.4°$



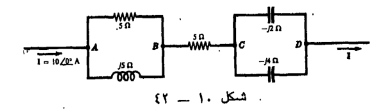
شكل ١٠ — ٤١ شكل ١٠ — ٤٠

١٠ — ٣٧ استخدم طريقة العقدة للحصول على الجهد عبر الدائرة المتصلة على التوازى والموضحة فى الشكل ١٠—٤١ .

الجواب : $72.2 \angle 53.8° \; V$

١٠ — ٣٨ باستخدام طريقة العقدة أوجد الجهود V_{AB} و V_{BC} و V_{CD} وذلك فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠—٤٢

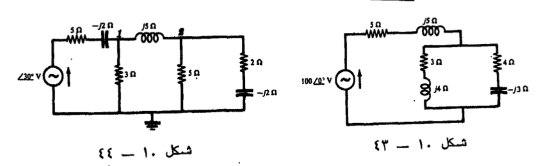
الجواب . $35.4 \angle 45 \; V, 50 \angle 0 \; V, 13.3 \angle -90° \; V$



شكل ١٠ — ٤٢

١٠ — ٣٩ باستخدام طريقة العقدة . أوجد الجهد عبر المعاوقات المتصلة على التوازى وذلك فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ — ٤٣

الجواب : $35 \angle -24.8° \; V$

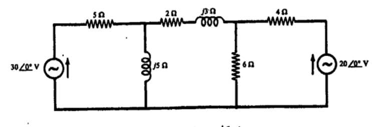


شكل ١٠ — ٤٤ شكل ١٠ — ٤٣

١٠ — ٤٠ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠ — ٤٤ ، أوجد جهدى العقدة V_1 و V_2 وكذلك تيار المصدر $10 \angle 30° \; V$

الجواب : $3.02 \angle 65.2° \; V, 1.34 \angle -31.3° \; V, 1.44 \angle 38.8° \; A$

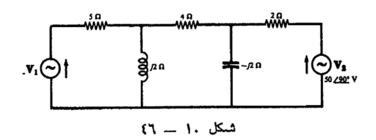
١٠ – ٤١ باستخدام طريقة العقدة أوجد القدرة فى المقاومة $6\ \Omega$ وذلك فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠–٤٥ .
الجواب : $39.6\ W$



شكل ١٠ — ٤٥

١٠ – ٤٢ بالإشارة إلى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ – ٤٥ ، أوجد التيار المار فى المعاوقة $2 + j3\Omega$ وذلك مع اعتبار الاتجاه إلى اليمين موجبا . الجواب : $1.73\ \underline{/40°}\ A$

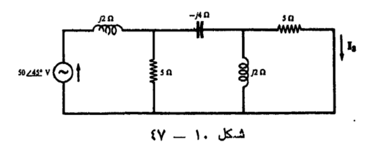
١٠ – ٤٣ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ – ٤٦ ، أوجد الجهد V_1 الذى يجعل التيار المار فى المقاومة $4\ \Omega$ مساويا للصفر . أختر احدى نهايتى المقاومة كعقدة اسناد . الجواب : $95.4\ \underline{/-23.2°}\ V$



شكل ١٠ — ٤٦

١٠ – ٤٤ بالإشارة إلى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ – ٤٦ إذا كان المصدر $V_1 = 50\underline{/0°}\ V$ و V_2 غير معلوم ، فأوجد V_2 بحيث يكون التيار المار فى المقاومة $4\ \Omega$ مساويا للصفر . الجواب : $26.2\ \underline{/113.2°}\ V$

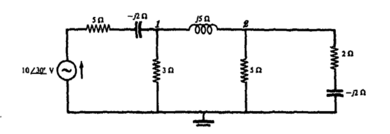
١٠ – ٤٥ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠–٤٧ أوجد التيار I_3 وذلك مع اعتبار الاتجاه الموضح فى الشكل .
الجواب : $11.7\ \underline{/112.9°}\ A$



شكل ١٠ — ٤٧

١٠ - ٤٦ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٠-٤٨ أوجد النسبة بين جهدى العقدتين V_1/V_2 .

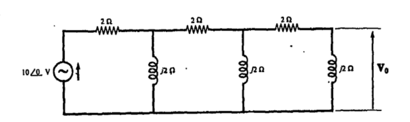
الجواب : $2.26\angle 96.35°$



شكل ١٠ — ٤٨

١٠ - ٤٧ باستخدام طريقة العقدة أوجد الجهد V_0 وذلك فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ - ٤٩ .

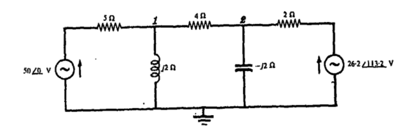
الجواب : $1.56\angle 128.7° V$



شكل ١٠ — ٤٩

١٠ - ٤٨ أوجد جهدى العقدتين V_1 و V_2 وذلك فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ - ٥٠ .

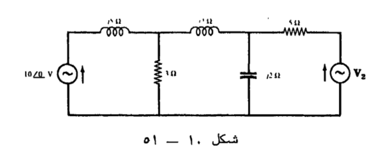
الجواب : $18.6\angle 68.2° V$



شكل ١٠ — ٥٠

١٠ - ٤٩ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ - ٥١ أوجد مصدر الجهد V_2 بحيث يكون تياره مساويا للصفر .

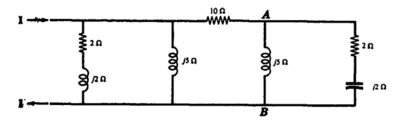
الجواب : $4\angle 180^\circ\ V$



شكل ١٠ — ٥١

١٠ - ٥٠ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٠ - ٥٢ - أوجد التيار المار I الذى ينتج عنه جهد V_{AB} مساويا $5\angle 30^\circ\ V$

الجواب : $9.72\angle -16^\circ$ A



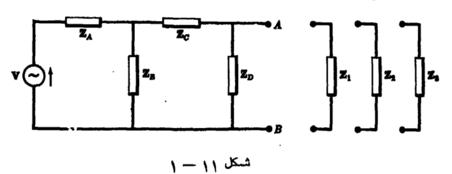
شكل ١٠ — ٥٢

الفصل الحادى عشر

نظريتا ثفنين ونورتن

مقدمة :

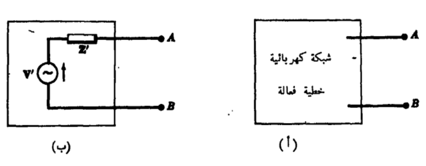
يمكن حل الشبكات الكهربائية التى فيها جميع المعاوقات ثابتة باستخدام إما طريقة تيار الشبيكة أو طريقة جهد العقدة. لنعتبر الآن الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١–١ وإذا أردنا توصيل المعاوقات Z_1 ، Z_2 ، Z_3 على التتابع فى الدائرة ، فإنه بإدخال كل معاوقة فى الدائرة ينتج لدينا مصفوفة مختلفة لـ Z أو Y حسب الطريقة المستخدمة ، وبالتالى فإننا نحتاج إلى ثلاثة حلول مختلفة . ويمكن التخلص من هذا العمل الشاق إذا استطعنا ابدال الشبكة الكهربائية الفعالة بدائرة بسيطة مكافئة وهذا هو هدف نظريتى ثفنين ونورتن .



شكل ١١ — ١

نظرية ثفنين :

تنص نظرية ثفنين على أن أى شبكة كهربائية خطية فعالة (active) لها نهايتان خارجيتان *AB* مثل تلك الموضحة فى الشكل ١١ — ٢ (أ) يمكن إبدالها بمصدر واحد للجهد V' متصل معه على التوالى معاوقة Z' كما هو موضح فى الشكل ١١–٢(ب)



شكل ١١ — ٢ دائرة ثفنين المكافئة

ومصدر ثفنين المكافئ V' هو جهد الدائرة المفتوحة المقاس بين الطرفين AB . والمعاوقة المكافئة هى المعاوقة المحركة للشبكة الكهربائية بين الطرفين AB وذلك مع وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر .

أما جهد ثفنين المكافئ V' فيجب أن يختار بحيث يكون التيار المار فى المعاوقة الموصلة له نفس اتجاه التيار الذى ينتج عند توصيل هذه المعاوقة فى الشبكة الأصلية الفعالة .

مثال ١ :

إذا أعطيت الدائرة الموضحة فى الشكل ١١– ٣ ، عين دائرة ثفنين المكافئة بالنسبة للطرفين AB . استخدم النتيجة التى تحصل عليها فى إيجاد التيارين المارين فى المعاوقتين $Z_1 = 5 - j5\ \Omega$ ، $Z_2 = 10\angle 0^\circ\ \Omega$ ، وذلك عند توصيلهما على التوالى بالطرفين AB ثم عين القدرة المعطاة لهما .

شكل ١١ — ٣

بالإشارة إلى الشكل ١١–٣ ، فإن التيار هو

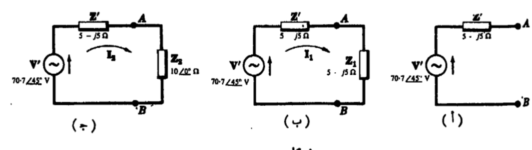
$$I = 50\angle 0^\circ/(5 + j5 - j5) = 10\angle 0^\circ\ A$$

إذن جهد ثفنين المكافئ V' هو الهبوط فى الجهد على المعاوقة $5 + j5\ \Omega$. إذن

$$V' = V_{AB} = I(5 + j5) = 70{\cdot}7\angle 45^\circ\ V$$

والمعاوقة المحركة عند الطرفين AB هى : $Z' = \dfrac{(5 + j5)(-j5)}{5 + j5 - j5} = 5 - j5\ \Omega$

ويوضح الشكل ١١ – ٤ (أ) دائرة ثفنين المكافئة، ونلاحظ أن المصدر V' متجه إلى الطرف A .



شكل ١١ — ٤

وبتوصيل المعاوقة Z_1 بين طرفى دائرة ثفنين المكافئة كما هو فى الشكل ١١ – ٤ (ب) ، فإننا نجد فى هذه الدائرة أن :

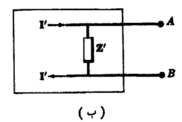
$$I_1 = (70{\cdot}7\angle 45^\circ)/(5 - j5 + 5 - j5) = 5\angle 90^\circ\ A \quad \text{و} \quad P_1 = (I_1)^2 5 = 125\ W$$

وعند توصيل المعاوقة Z_2 بين الطرفين AB كما فى الشكل ١١ – ٤ (جـ) ، فإننا نحصل على :

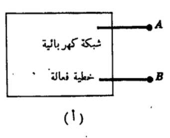
$$P_2 = (I_2)^2 10 = 200\ W \quad و \quad I_2 = (70{\cdot}7\angle 45^\circ)/(5 - j5 + 10) = 4{\cdot}47\angle 63{\cdot}43^\circ\ A$$

نظرية نورتن

تنص نظرية نورتن على أن أى شبكة كهربائية خطية فعالة لها طرفان AB كالموضحة فى الشكل ١١– ٥ (١) يمكن ابدالها بمصدر واحد للتيار I' متصل معه على التوازى معاوقة واحدة كما فى الشكل ١١ – ٥ (ب)



(ب)



(أ)

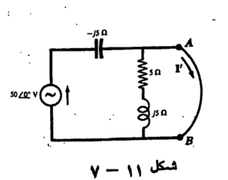
شكل ١١ — ٥ دائرة نورتن المكافئة

ومصدر نورتن المكافئ هو تيار الدائرة المغلقة بين طرفى الشبكة الفعالة . والمعاوقة Z' المتصلة بمصدر التيار هى المعاوقة المحركة للشبكة الكهربائية بين الطرفين AB وذلك عند وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر . وعلى ذلك فإن المعاوقتين Z' لدائرتى نورتن وثفنين المكافئتين متساويتان وذلك لأى شبكة خطية فعالة .

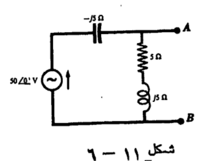
واتجاه التيار المار فى المعاوقة المتصلة بين طرفى دائرة نورتن المكافئة يجب أن يكون هو نفس اتجاه التيار المار فى نفس المعاوقة عند توصيلها بالشبكة الفعالة الأصلية .

مثال ٢ :

إذا أعطيت الدائرة الموضحة فى الشكل ١١–٦ ، فعين دائرة نورتن المكافئة بالنسبة للطرفين AB . ثم استخدم النتيجة التى تحصل عليها فى إيجاد التيار المار فى المعاوقتين $Z_1 = 5 - j5\Omega$ ، $Z_2 = 10\angle 0\ \Omega$، وذلك عند توصيلهما بالترتيب بين الطرفين AB ، وعين كذلك القدرة المعطاة لهما .



شكل ١١ — ٧

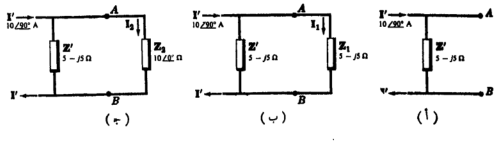


شكل ١١ — ٦

بالإشارة إلى الشكل ١١–٧ ، عند عمل دائرة مغلقة بين الطرفين AB فإن : $\mathbf{I}' = 50\angle 0°(-j5) = 10\angle 90°$ A

وعند وضع المصدر مساويا للصفر فإن : $Z' = \frac{-j5(5+j5)}{5+j5-j5} = 5 - j5\,\Omega$

ويوضح الشكل ١١ – ٨ (أ) دائرة نورتن المكافئة . لاحظ أن التيار يتجه ناحية الطرف A .



شكل ١١ – ٨

وعند توصيل المعاوقة $\mathbf{Z}_1$ بين طرفى دائرة نورتن المكافئة كما فى الشكل ١١ – ٨ (ب) ، فإن التيار المار فى $\mathbf{Z}_1$ يكون

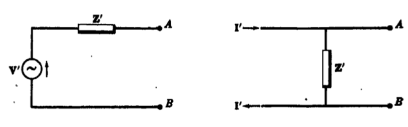
$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}'\left(\frac{\mathbf{Z}'}{\mathbf{Z}'+\mathbf{Z}_1}\right) = 10\angle 90°\left(\frac{5-j5}{10-j10}\right) = 5\angle 90°$ A والقدرة المعطاة لـ $\mathbf{Z}_1$ هى . $P_1 = (I_1)^2 5 = 125$ W

وعند توصيل المعاوقة Z_2 بين الطرفين AB كما فى الشكل ١١ – ٨ (جـ) ، فإننا نحصل على :

$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}'(5-j5)/(15-j5) = 4{\cdot}47\angle 63{\cdot}43°$ A و $P_2 = (I_2)^2 10 = 200$ W

دائرة ثفنين ونورتن المكافئتان :

لقد طبقنا نظرية ثفنين ونورتن على دائرتين متماثلتين فى المثالين (١) ، (٢) على الترتيب وحصلنا على نتائج متطابقة . ومن هذا ينتج أن دائرتى ثفنين ونورتن يكافئ كل منهما الآخر .



شكل ١١ – ٩ دائرتى ثفنين ونورتن

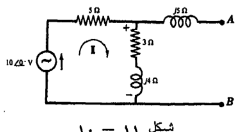
فى الشكل ١١–٩ نجد أن نفس المعاوقة $\mathbf{Z}'$ متصلة على يسار النهايتين AB . فى كلا الدائرتين . وعند غلق الدائرتين فإن التيار المار فى دائرة ثفنين المغلقة يعطى بالعلاقة $\mathbf{V}'/\mathbf{Z}'$ ، بينما يعطى التيار المار فى دائرة نورتن المغلقة بـ $\mathbf{I}'$. وبما أن التيارين متساويان إذن هناك علاقة بين تيار نورتن المكافئ وجهد ثفنين المكافئ ، أى أن $\mathbf{I}' = \mathbf{V}'/\mathbf{Z}'$.

نفس النتيجة السابقة يمكن الحصول عليها إذا اعتبرنا جهد الدائرة المفتوحة فى كلتا الدائرتين . فى دائرة ثقنين نجد أن الجهد هو V' أما فى دائرة نورتن فإن هذا الجهد هو $I'Z'$. وبمساواة الجهدين $V' = I'Z'$ أو $I' = V'/Z'$ وهى نفس النتيجة السابقة .

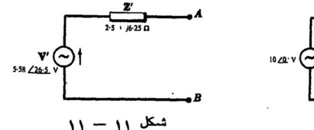
إن دائرتى ثقنين ونورتن متكافئتان عند ذبذبة واحدة فقط . وينتج هذا من أن المعاوقات المركبة للشبكة الكهربائية الفعالة استبدلت بالمعاوقة المكافئة Z' وأن الجهد المكافئ V' والتيار المكافئ I' قد حصل عليها باستخدام المعاوقات المركبة للشبكة الكهربائية الفعالة ، وبما أن كل ممانعة فى الشبكة الكهربائية الفعالة تعتمد على الذبذبة ، فينتج من ذلك أن دائرتى ثقنين ونورتن متكافئتان فقط عند الذبذبة التى حسبو عندها .

مسائل محلولة

١١-١ أوجد دائرة ثقنين المكافئة للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١-١٠ .



شكل ١١ — ١٠



شكل ١١ — ١١

نحسب المعاوقة المكافئة للدائرة بوضع المصدر مساويا للصفر . إذن

$$Z' = j5 + \frac{5(3 + j4)}{5 + 3 + j4} = 2{\cdot}5 + j6{\cdot}25\,\Omega$$

أن تيار الدائرة المفتوحة I الموضحة فى الشكل ١١-١٠ هو : $I = (10\angle 0^\circ)/(5 + 3 + j4) = 1{\cdot}117\angle -26{\cdot}6^\circ$ A

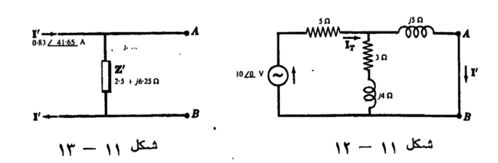
إذن جهد الدائرة المفتوحة هو الهبوط فى الجهد على المعاوقة $3 + j4\,\Omega$.

$$V' = I(3 + j4) = (1{\cdot}117\angle -26{\cdot}6^\circ)(5\angle 53{\cdot}1^\circ) = 5{\cdot}58\angle 26{\cdot}5^\circ \text{ V}$$

وتعطى قطبية V' باتجاه التيار الداخل إلى المعاوقة $3 + j4\,\Omega$. وعلى ذلك فإن اتجاه استجابة V' تكون فى اتجاه الطرف A فى الدائرة المكافئة الموضحة فى الشكل ١١ - ١١ .

١١-٢ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١-١٠ .

كما فى المسألة ١١ - ١ ، فإن المعاوقة المكافئة هى : $Z' = 2{\cdot}5 + j6{\cdot}25\,\Omega$



شكل ١١ — ١٣ شكل ١١ — ١٢

نعمل دائرة مغلقة بين الطرفين AB كما هو موضح فى الشكل ١١ — ١٢ ، ثم نعين المعاوقة الكلية المتصلة بالمصدر $10\,\underline{/0^\circ}\ V$

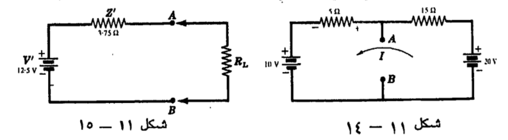
$$Z_T = 5 + \frac{(3+j4)j5}{(3+j4+j5)} = 5{\cdot}83 + j2{\cdot}5 = 6{\cdot}35\angle 23{\cdot}2\ \Omega$$

إذن التيار هــو $I_T = 10\angle 0/Z_T = (10\angle 0)/(6{\cdot}35\angle 23{\cdot}2) = 1{\cdot}575\angle -23{\cdot}2\ \text{A}.$

و $I' = I_T\left(\frac{3+j4}{3+j4+j5}\right) = 1{\cdot}575\angle -23{\cdot}2\left(\frac{5\angle 53{\cdot}1}{3+j9}\right) = 0{\cdot}83\angle -41{\cdot}65\ \text{A}$

ويوضح الشكل ١١—١٣ دائرة نورتن المكافئة . لاحظ أن التيار I' يتجه ناحية A وذلك لأن تيار الدائرة المغلقة يدخل الدائرة المغلقة عند الطرف A .

١—٣ فى دائرة التيار المستمر الموضحة فى الشكل ١١ — ١٤ ، وصل ثلاث مقاومات $R_1 = 1\ \Omega$ و $R_2 = 5\Omega$ و $R_3 = 10\ \Omega$ تباعا بين الطرفين AB . عين القدرة المعطاة لكل مقاومة .



شكل ١١ — ١٥ شكل ١١ — ١٤

نحصل أولا على دائرة ثفنين المكافئة . فى الشكل ١١—١٤ نجد أن التيار هو $I = (20 - 10)/(5 + 15) = 0{\cdot}5\ \text{A}$ إذن الهبوط فى الجهد على المقاومة $5\ \Omega$ هو : $V_5 = I(5) = 2{\cdot}5$ volts وذلك بالقطبية الموضحة .

نعبر عن جهد A بالنسبة للنقطة B بالمعادلة

$$V_{AB} = V' = 10 + V_5 = 12{\cdot}5\ \text{V}$$

عند وضع مصدر التيار المستمر مساويا للصفر ، فإن المعاوقة Z' تصبح محصلة المقاومتين $5\ \Omega$ و $15\ \Omega$ المتصلتين على التوازى ، أى أن :

$$Z' = \frac{5(15)}{20} = 3{\cdot}75\ \Omega$$

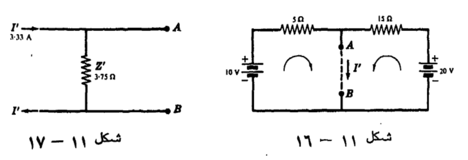
يوضح الشكل ١١—١٥ دائرة ثفنين المكافئة . والآن بتوصيل كل من المقاومات الثلاث بالطرفين AB فإنه يمكن حساب القدرة المعطاة لكل منهما :

للمقاومة $R_1 = 1\ \Omega$: $I_1 = 12{\cdot}5/(3{\cdot}75 + 1) = 2{\cdot}63\ A$ ، والقدرة هى : $= (I_1)^2(1) = (2{\cdot}63)^2(1) = 6{\cdot}91\ W$

للمقاومة $R_2 = 5\ \Omega$: $I_2 = 12{\cdot}5/(3{\cdot}75 + 5) = 1{\cdot}43\ A$ ، والقدرة هى : $= (I_2)^2(5) = (1{\cdot}43)^2(5) = 10{\cdot}2\ W$

للمقاومة $R_3 = 10\Omega$: $I_3 = 12{\cdot}5/(3{\cdot}75 + 10) = 0{\cdot}91\ A$ ، والقدرة هى $'_3 = (I_3)^2(10) = (0{\cdot}91)^2(10) = 8{\cdot}28\ W$

١١—٤ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١—١٦ وذلك بالنسبة للطرفين AB.



شكل ١١ — ١٦ شكل ١١ — ١٧

نصل دائرة مغلقة بين الطرفين AB كما هو موضح ، ثم نحسب التيار I' .

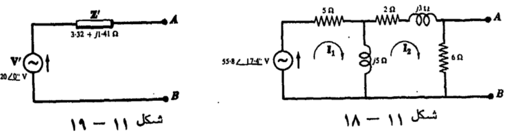
$$I' = 10/5 + 20/15 = 3{\cdot}33\ A$$

المعاوقة المكافئة بين الطرفين AB مع وضع المصدر مساوياً للصفر هى :

$$Z' = 5(15)/(5 + 15) = 3{\cdot}75\ \Omega$$

ويوضح الشكل ١١—١٧ دائرة نورتن المكافئة .

١١—٥ أوجد دائرة ثفنين المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١—١٨ .



شكل ١١ — ١٨ شكل ١١ — ١٩

عند فتح الدائرة فإنه يوجد تياران للشبيكيتين الفرعيتين كما هو موضح . ويعطى تيار الشبيكة الفرعية بالمعادلة .

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 55\cdot8\angle{-17\cdot4^\circ} \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 \\ -j5 & 8+j8 \end{vmatrix}} = \frac{279\angle{72\cdot6^\circ}}{83\cdot7\angle{72\cdot6^\circ}} = 3\cdot33\angle{0^\circ}\ \text{A}$$

إذن جهد الدائرة المفتوحة هو $V_{AB} = I_2(6) = 3\cdot33\angle{0^\circ}\ (6) = 20\angle{0^\circ}\ \text{V}$. والمعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية هى

$$Z' = \frac{6\left[\frac{5(j5)}{5+j5} + (2+j8)\right]}{6 + \left[\frac{5(j5)}{5+j5} + (2+j8)\right]} = 3\cdot32 + j1\cdot41\ \Omega$$

ويوضح الشكل ١١–١٩ دائرة ثفنين المكافئة واتجاه V' إلى الطرف A.

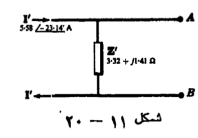
١١–٦ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ –١٨ .

بعمل دائرة مغلقة بين الطرفين AB ، يكون التيار I_2 المار فى الدائرة المغلقة هو

$$I_2 = I' = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 55\cdot8\angle{-17\cdot4^\circ} \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 \\ -j5 & 2+j8 \end{vmatrix}} = \frac{279\angle{72\cdot6^\circ}}{(-5+j50)} = 5\cdot58\angle{-23\cdot14^\circ}\ \text{A}$$

وكما فى المسألة ١١ – ٥ فإن المعاوقة هى

$$Z' = 3\cdot32 + j1\cdot41\ \Omega$$



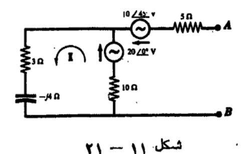
شكل ١١ — ٢٠

وللتحقيق فإنه يمكن مقارنة جهد الدائرة المفتوحة فى دائرة نورتن المكافئة الموضحة فى الشكل ١١–٢٠ بجهد ثفنين V' فى المسألة ١١–٥ .

$$V_{oc} = I'Z' = 5\cdot58\angle{-23\cdot14^\circ}\ (3\cdot32 + j1\cdot41) = 20\cdot1\angle{-0\cdot14^\circ}\ \text{V}$$

وفى المسألة ١١ – ٥ $\quad V' = 20\angle{0^\circ}\ \text{V}$

١١–٧ ابدل الشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١–٢١ بدائرة ثفنين المكافئة وذلك عند الطرفين AB



شكل ١١ — ٢١

عند فتح الدائرة يكون التيار هو :

$$I = 20\angle{0^\circ}/(10 + 3 - j4) = 1\cdot47\angle{17\cdot1^\circ}\ \text{A}$$

إذن الهبوط فى الجهد على المقاومة $10\ \Omega$ هو :

$$V_{10} = I(10) = 14{\cdot}7\angle 17{\cdot}1^\circ \text{ V.}$$

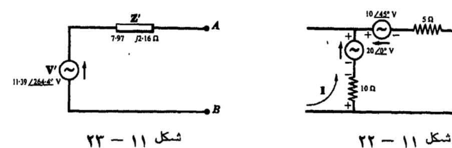
والآن نجد أن الجهد V_{AB} هو مجموع جهدى المصدرين والهبوط فى الجهد على المقاومة $10\,\Omega$ ، وذلك بالقطبية الموضحة فى الشكل ١١–٢٢ . إذن

$$V' = V_{AB} = 20\angle 0^\circ - 10\angle 45^\circ - 14{\cdot}7\angle 17{\cdot}1^\circ = 11{\cdot}39\angle 264{\cdot}4^\circ \text{ V}$$

والمعاوقة هى :

$$Z' = 5 + \frac{10(3-j4)}{10+3-j4} = 7{\cdot}97 - j2{\cdot}16\,\Omega.$$

ويوضح الشكل ١١–٢٣ دائرة ثفنين المكافئة .



شكل ١١ — ٢٣ شكل ١١ — ٢٢

١١–٨ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية المعطاة فى الشكل ١١–٢١.

كما فى المسألة ١١–٧ فإن المعاوقة : $Z' = 7{\cdot}97 - j2{\cdot}16\,\Omega$

وبعمل دائرة مغلقة بين الطرفين AB واختيار اتجاه عقارب الساعة لتيارات الشبكة فى المسارات المغلقة الأولية ، نجـد أن

$$I' = I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 13-j4 & -20 \\ -10 & (20-10\angle 45^\circ) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13-j4 & -10 \\ -10 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{156\angle 247{\cdot}4^\circ}{112{\cdot}3\angle -32{\cdot}3^\circ} = 1{\cdot}39\angle 279{\cdot}7^\circ \text{ A}$$

ويتجه تيار مصدر نورتن I' إلى الطرف A كما هو موضح فى الشكل ١١ — ٢٤ .

بمقارنة جهد الدائرة المفتوحة V_{OC} لهذه الدائرة بجهد مصدر ثفنين المكافىء فى المسألة ١١ — ٧ ، نجد أن :

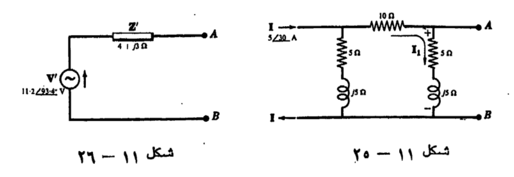
$$V_{oc} = I'Z' = (1{\cdot}39\angle 279{\cdot}7^\circ)(8{\cdot}25\angle -15{\cdot}2^\circ)$$
$$= 11{\cdot}45\angle 264{\cdot}5^\circ \text{ V}$$

و $$V' = 11{\cdot}39\angle 264{\cdot}4^\circ \text{ V}$$

I' 1·39 ∠279·7° A — A
Z' 8·25 ∠−15·2° Ω
I' — B

شكل ١١ — ٢٤

١١ – ٩ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB وذلك للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١– ٢٥ والتى تحتوى على مصدر التيار $\mathbf{I} = 5\angle 30^\circ$ A.



شكل ١١ — ٢٦ شكل ١١ — ٢٥

تتكون المعاوقة المكافئة $\mathbf{Z}'$ بين الطرفين AB مع وضع المصدر مساوياً للصفر من فرعين متصلين على التوازى . إذن

$$\mathbf{Z}' = \frac{(5 + j5)(15 + j5)}{(5 + j5 + 15 + j5)} = 4 + j3\,\Omega$$

وبفتح الدائرة ينقسم التيار $\mathbf{I}$ بين الفرعين . وبالحل للحصول على $\mathbf{I}_1$ الموضح بالرسم ، نجد أن

$$\mathbf{I}_1 = 5\angle 30^\circ \left(\frac{5 + j5}{20 + j10}\right) = 1{\cdot}585\angle 48{\cdot}4^\circ\,\Omega$$

وبما أن الجهد $\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}$ هو الهبوط فى الجهد على المعاوقة $5 + j\,5$ ، إذن

$$\mathbf{V}' = \mathbf{I}_1(5 + j5) = (1{\cdot}585\angle 48{\cdot}4^\circ)(7{\cdot}07\angle 45^\circ) = 11{\cdot}2\angle 93{\cdot}4^\circ \text{ V}$$

ويوضح الشكل ١١ – ٢٦ دائرة ثفنين المكافئة .

١١ – ١٠ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١ – ٢٥ .

المعاوقة المكافئة للشبكة والمحسوبة فى المسألة ١١ – ٩ هى $\mathbf{Z}' = 4 + j3 = 5\angle 36{\cdot}9^\circ\,\Omega$ بعمل دائرة مغلقة بين الطرفين AB فى الشكل ١١ – ٢٥ ، يكون التيار المار فى الدائرة المغلقة هو

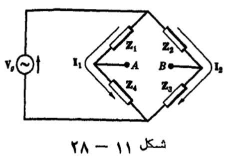
$$\mathbf{I}' = 5\angle 30^\circ \left(\frac{5 + j5}{5 + j5 + 10}\right) = 2{\cdot}24\angle 56{\cdot}6^\circ \text{ A}$$

ويوضح الشكل ١١–٢٧ دائرة نورتن المكافئة . عندعمل دائرة مفتوحة فإن جهد دائرة نورتن المكافئة يكون

$$\mathbf{V}_{oc} = (2{\cdot}24\angle 56{\cdot}6^\circ)(5\angle 36{\cdot}9^\circ) = 11{\cdot}2\angle 93{\cdot}5^\circ \text{ V}$$

وفى المسألة ١١ – ٩ نجد أن جهد ثفنين المكافى هو $\mathbf{V}' = 11{\cdot}2\angle 93{\cdot}4^\circ$ V .

شكل ١١ — ٢٧



شكل ١١ — ٢٨

١١–١١ أوجد دائرة ثفنين المكافئة لدائرة القنطرة المعطاة بالشكل ١١ – ٢٨ . تحت أى شرط يصبح جهد الدائرة المفتوحة بين الطرفين AB مساوياً للصفر ؟

عند وضع المصدر مساوياً للصفر ، فإن المعاوقة المكافئة بين الطرفين AB تتكون من مجموعة التوازى Z_1 و Z_4 المتصلة على التوالى مع مجموعة التوازى Z_2 و Z_3 . إذن

$$Z' = \frac{Z_1Z_4}{Z_1 + Z_4} + \frac{Z_2Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

عند فتح الدائرة فإنه ينتج عن المصدر V_g التيارين I_1 و I_2 كما فى الرسم

$$I_1 = V_g/(Z_1 + Z_4) \quad و \quad I_2 \quad V_g/(Z_2 + Z_3)$$

وبفرض أن جهد A أعلى من جهد B ، فإننا نحصل على

$$V' = V_{AB} = I_1Z_4 - I_2Z_3$$

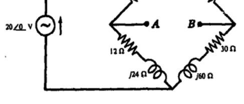
$$= \frac{V_g Z_4}{Z_1 + Z_4} - \frac{V_g Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$= V_g\left[\frac{Z_2Z_4 - Z_1Z_3}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}\right]$$

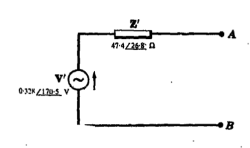
شكل ١١ — ٢٩

مما سبق يتضح أن جهد ثفنين المكافىء يتناسب مع الفرق $Z_2Z_4 - Z_1Z_3$. وعندما $Z_2Z_4 = Z_1Z_3$ فإن الجهد $V' = 0.$

١١ – ١٢ أوجد دائرة ثفنين المكافئة لدائرة القنطرة الموضحة فى الشكل ١١ – ٣٠ .



شكل ١١ — ٣٠



شكل ١١ — ٣١

عند وضع المصدر مساوياً للصفر فإن المعاوقة المكافئة بين الطرفين AB تصبح

$$Z' = \frac{21(12+j24)}{33+j24} + \frac{50(30+j60)}{80+j60} = 47{\cdot}4\angle 26{\cdot}8^\circ\ \Omega$$

وعند فتح الدائرة فإن التيار المار فى الجهة اليسرى فى القنطرة يكون $I_1 = (20\angle 0^\circ)/(33+j24)$ A . والتيار المار فى الجهة اليمنى يكون $I_2 = (20\angle 0^\circ)/(80+j60)$ A

بفرض أن جهد النقطة A أعلى من جهد النقطة B ، نحصل على

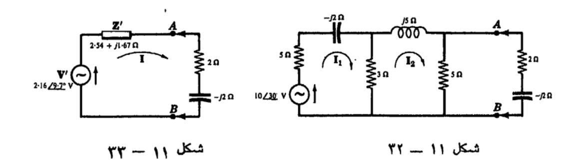
$$V' = V_{AB} = \frac{(20\angle 0^\circ)(12+j24)}{33+j24} - \frac{(20\angle 0^\circ)(30+j60)}{80+j60}$$

$$= (20\angle 0^\circ)(1+j2)\left[\frac{12}{33+j24} - \frac{30}{80+j60}\right] = 0{\cdot}328\angle 170{\cdot}5^\circ\ \text{V}$$

١١–١٣ أبدل الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ – ٣٢ والتى على يسار الطرفين AB بدائرة ثفنين المكافئة . ثم عين التيار المار فى المعاوقة $2 - j2\Omega$ عند توصيلها بالدائرة المكافئة .

باختصار الشبكة الكهربائية يمكن إيجاد المعاوقة المكافئة Z' . ونلاحظ أن المعاوقة $5 - j2\Omega$ متصلة على التوازى مع المقاومة $3\ \Omega$. إذن المعاوقة المكافئة لها هى

$$Z_1 = \frac{(5-j2)3}{8-j2} = 1{\cdot}94 - j0{\cdot}265\ \Omega$$



شكل ١١ – ٣٣ شكل ١١ – ٣٢

الآن نجد أن المعاوقة Z_1 متصلة على التوالى مع المعاوقة $j\,5\ \Omega$ ، وبجمعهما نحصل على :

$$Z_2 = 1{\cdot}94 - j0{\cdot}265 + j5 = 1{\cdot}94 + j4{\cdot}735\ \Omega$$

ويمكن الحصول على المعاوقة المكافئة Z' من محصلة Z_2 والمقاومة 5Ω . إذن

$$Z' = \frac{(1{\cdot}94+j4{\cdot}735)5}{6{\cdot}94+j4{\cdot}735} = 3{\cdot}04\angle 33{\cdot}4^\circ = 2{\cdot}54 + j1{\cdot}67\ \Omega$$

وباعتبار الدائرة المفتوحة واستخدام طريقة تيار الشبيكة للحصول على I_2 نجد أن :

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8-j2 & 10\angle 30^\circ \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8-j2 & -3 \\ -3 & 8+j5 \end{vmatrix}} = \frac{30\angle 30^\circ}{69{\cdot}25\angle 20{\cdot}3^\circ} = 0{\cdot}433\angle 9{\cdot}7^\circ\ \Omega$$

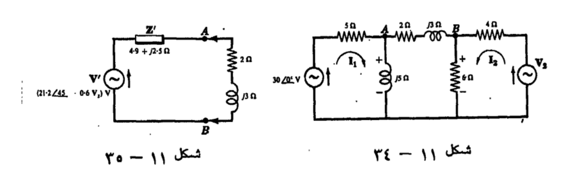
إن جهد الدائرة المفتوحة هو الهبوط فى الجهد على المقاومة $5\ \Omega$ ، أى أن

$$V' = I_2(5) = (0{\cdot}433\angle 9{\cdot}7^\circ)5 = 2{\cdot}16\angle 9{\cdot}7^\circ\ V$$

وبتوصيل المعاوقة $2 - j2\Omega$ بدائرة ثفنين المكافئة الموضحة فى الشكل ١١–٣٣ ، يكون التيار المطلوب هو :

$$I = V'/(Z' + 2 - j2) = (2{\cdot}16\angle 9{\cdot}7^\circ)/(4{\cdot}54 - j0{\cdot}33) = 0{\cdot}476\angle 13{\cdot}87^\circ\ A$$

١١ – ١٤ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ – ٣٤ ، أوجد V_2 بحيث يصبح التيار المار فى المعاوقة $2 + j3\Omega$ مساوياً للصفر .



شكل ١١ – ٣٥   شكل ١١ – ٣٤

نطبق نظرية ثفنين على الدائرة المعطاة للحصول على الجهد المكافىء المقاس بين الطرفين AB . وبعمل دائرة مفتوحة فإن تيارى المسارين المغلقين هما

$$I_1 = (30\angle 0^\circ)/(5 + j5)\ A \quad \text{و} \quad I_2 = V_2/10\ \text{amperes}$$

وبفرض أن جهد النقطة A أعلى من جهد النقطة B نحصل على :

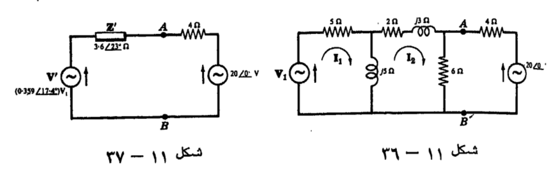
$$V' = V_{AB} = I_1(j5) - I_2(6) = 30\angle 0^\circ(j5)/(5 + j5) - V_2(6)/10 = 21{\cdot}2\angle 45^\circ - 0{\cdot}6V_2\ \text{volts}$$

ويكون التيار المار فى دائرة ثفنين المكافئة الموضحة فى الشكل ١١ – ٣٥ مساوياً للصفر إذا كان $V' = 0$. إذن

$$0 = 21{\cdot}2\angle 45^\circ - 0{\cdot}6V_2 \quad , \quad V_2 = 35{\cdot}4\angle 45^\circ\ V$$

ملحوظة : لانحتاج فى هذه المسألة إلى قيمة المعاوقة Z' الموضحة فى الشكل ١١ – ٣٥ ولكن يترك حساب قيمتها كتمرين للقارىء .

١١ – ١٥ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١١ – ٣٦ ، أوجد قيمة جهد المصدر V_1 التى تجعل تيار المصدر $20\angle 0°\,V$ مساوياً للصفر



شكل ١١ – ٣٧ شكل ١١ – ٣٦

نوجد دائرة ثفنين المكافئة للشبكة الكهربائية الفعالة التى على يسار الطرفين AB . وبعمل دائرة مفتوحة فإنه يوجد تياران للشبكتين الفرعيتين I_1 و I_2 كما هو موضح . وبالحل للحصول على I_2 نجد أن

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & V_1 \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 \\ -j5 & 8+j8 \end{vmatrix}} = \frac{V_1\, 5\angle 90°}{83{\cdot}6\angle 72{\cdot}6°} \text{ amperes}$$

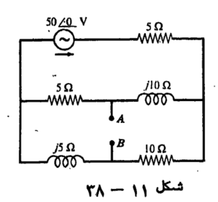
والآن نلاحظ أن جهد الدائرة المفتوحة هو الهبوط فى الجهد على المقاومة $6\,\Omega$ وهو يساوى $I_2(6)$.

$$V' = \frac{V_1\, 5\angle 90°}{83{\cdot}6\angle 72{\cdot}6°}(6) = (0{\cdot}359\angle 17{\cdot}4°)V_1 \text{ volts}$$

وعند توصيل دائرة ثفنين المكافئة بالطرفين AB كما هو موضح فى الشكل ١١ – ٣٧ ، يتضح أنه لكى يصبح التيار مساوياً للصفر فإن V' لابد وأن يساوى المصدر الآخر ، أى أن $V' = 20\angle 0°\,V$. إذن $(0{\cdot}359\angle 17{\cdot}4°)V_1 = 20\angle 0°\,V$ ومنها نجد أن $V_1 = 55{\cdot}7\angle -17{\cdot}4°\,V$

وتنطبق أيضاً الملاحظة الموجودة فى المسألة ١١ – ١٤ على هذه المسألة

١١ – ١٦ إذا وصلت المعوقات $Z_1 = 10\angle 30°\,\Omega$ و $Z_2 = 20\angle 0°\,\Omega$ و $Z_3 = 5 - j5\,\Omega$ تباعاً بين النقطتين AB فى الشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١–٣٨ ، فاحسب القدرة فى كل معاوقة .



شكل ١١ – ٣٨

نستبدل الشبكة الكهربائية بين النقطتين AB بدائرة ثفنين المكافئة . ثم نصل المعاوقات تباعا بالدائرة المكافئة .

لحساب المعاوقة الداخلة نختار ثلاثة تيارات شبيكة كما لو كان المصدر المحرك بين AB كما هو مبين فى الشكل ١١ – ٣٩ . فى هذه الحالة تكون المعاوقة الداخلة Z_{input} هى Z' لدائرة ثفنين . ومن تعريف Z_{input} لدينا $Z_{input\,1} = \Delta_z/\Delta_{11}$ ، حيث

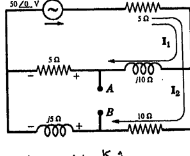
$$\Delta_z = \begin{vmatrix} (5+j5) & -5 & (5+j5) \\ -5 & (10+j10) & (-5-j10) \\ (5+j5) & (-5-j10) & (15+j15) \end{vmatrix} = 1455\underline{/121^\circ}$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} (10+j10) & (-5-j10) \\ (-5-j10) & (15+j15) \end{vmatrix} = 213{\cdot}5\underline{/69{\cdot}4^\circ}$$

و

$$Z' = Z_{input\,1} = \Delta_z/\Delta_{11} = 1455\underline{/121^\circ}\,/213{\cdot}5\underline{/69{\cdot}4^\circ} = 6{\cdot}82\underline{/51{\cdot}6^\circ} = 4{\cdot}23 + j5{\cdot}34\ \Omega$$

وبالتعويض



شكل ١١ — ٤٠

شكل ١١ — ٣٩

وبعمل دائرة مفتوحة يوجد لدينا تياران للشبيكة I_1 و I_2 كما فى الشكل ١١ – ٤٠ وهذان التياران هما :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 5 \\ 50 & 15+j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10+j10 & 5 \\ 5 & 15+j5 \end{vmatrix}} = \frac{558\underline{/26{\cdot}6^\circ}}{213{\cdot}5\underline{/69{\cdot}4^\circ}} = 2{\cdot}62\underline{/-42{\cdot}8^\circ}\ A$$

و

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10+j10 & 50 \\ 5 & 50 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = \frac{558\underline{/63{\cdot}4^\circ}}{213{\cdot}5\underline{/69{\cdot}4^\circ}} = 2{\cdot}62\underline{/-6^\circ}\ A$$

والآن فإن جهد ثفنين المكافىء V' هو جهد الدائرة المفتوحة وذلك مع فرض أن جهد A أعلى من جهد B . ونجد فى الشكل ١١–٤٠ القطبية اللحظية للهبوط فى الجهد على المقاومة $5\ \Omega$ المتصلة فى الفرع الأوسط والهبوط فى الجهد على الممانعة $j5\ \Omega$ المتصلة فى الفرع السفلى إذن :

$$V' = V_{AB} = I_1(5) - I_2(j5)$$
$$= (2{\cdot}62\underline{/-42{\cdot}8^\circ})(5) - (2{\cdot}62\underline{/-6^\circ})(5\underline{/90^\circ})$$
$$= 23{\cdot}4\underline{/-69{\cdot}4^\circ}\ V$$

شكل ١١ — ٤١

ويوضح الشكل ١١ – ٤١ دائرة ثفنين المكافئة والمتصلة بها معاوقة الحمل $\mathbf{Z}_L$. بين الطرفين AB .

وبالتعويض عن قيمة . $\mathbf{Z}_L$ المعطاة فى $\mathbf{I} = \mathbf{V}'/(\mathbf{Z}' + \mathbf{Z}_L)$. يمكننا الحصول على التيارات والقدرات المطلوبة .

إذن عندما $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_1 = 10\angle 30^\circ = 8.66 + j5\ \Omega$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{23.4\angle -69.4^\circ}{(4.23 + j5.34 + 8.66 + j5)} = 1.414\angle -108.2^\circ\ \mathrm{A} \quad \text{و} \quad P_1 = (I_1)^2\ \mathrm{Re}\mathbf{Z}_1 = (1.414)^2(8.66) = 17.32\ \mathrm{W}$$

وعندما $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_2 = 20\angle 0^\circ\ \Omega$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{23.4\angle -69.4^\circ}{4.23 + j5.34 + 20)} = 0.940\angle -81.8^\circ\ \mathrm{A} \quad , \quad P_2 = (0.940)^2(20) = 17.65\ \mathrm{W}$$

وعندما $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_3 = 5 - j5\ \Omega$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{23.4\angle -69.4^\circ}{(4.23 + j5.34 + 5 - j5)} = 2.54\angle -71.5^\circ\ \mathrm{A} \quad \text{و} \quad P_3 = (2.54)^2(5) = 32.3\ \mathrm{W}$$

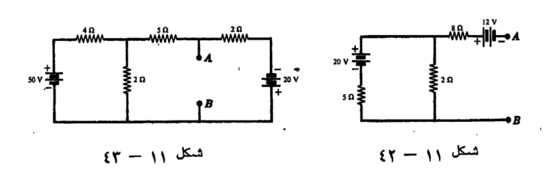
مسائل اضافية

١ – ١٧ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الفعالة المعطاة فى الشكل ١١ – ٤٢ .

الجواب : $Z' = 9.43$ ohms, $V' = 6.29$ V $(B+)$

١ – ١٨ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ – ٤٢

الجواب : $Z' = 9.43$ ohms, $I' = 0.667$ A



شكل ١١ – ٤٢ شكل ١١ – ٤٣

١١ – ١٩ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية النشطة الفعالة المعطاة فى الشكل ١١ – ٤٣ .

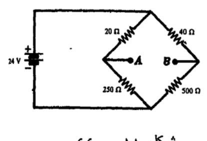
الجواب : $Z' = 1.52$ ohms, $V' = 11.18$ V $(B+)$

١١ – ٢٠ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ – ٤٣ .

الجواب : $Z' = 1.52$ ohms, $I' = 7.35$ A

١١ – ٢١ أوجد ثفنين المكافئة بين الطرفين AB لدائرة القنطرة الموضحة فى الشكل ١١ – ٤٤ .

الجواب : $Z' = 55{\cdot}5$ ohms, $V' = 0$



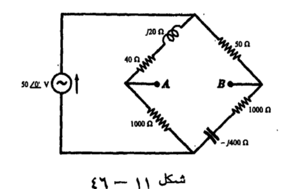
شكل ١١ — ٤٤

١١ – ٢٢ إذا استبدلنا المقاومة 500Ω بمقاومة 475Ω فى دائرة القنطرة الموضحة فى الشكل ١١ – ٤٤ ، فأوجد دائرة ثفنين المكافئة فى هذه الحالة

الجواب : $Z' = 55{\cdot}4$ ohms, $V' = 0{\cdot}0863$ V $(A+)$

١١ – ٢٣ طبق نظرية ثفنين على دائرة القنطرة الموضحة فى الشكل ١١ – ٤٥ لتحصل على الانحراف فى الجلفانومتر المتصل بين AB علما بأن مقاومته 100Ω وحساسيته 0.5 μA/mm.

الجواب : $D = 0.195$ m



شكل ١١ — ٤٦

شكل ١١ — ٤٥

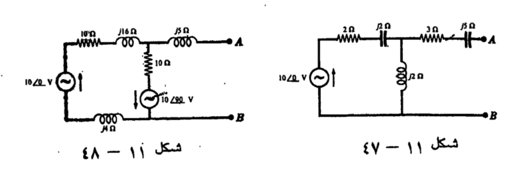
١١ – ٢٤ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB لقنطرة التيار المتردد الموضحة فى الشكل ١١ – ٤٦ .

الجواب : $Z' = 88{\cdot}7\angle 11{\cdot}55^\circ\ \Omega$, $V' = 0{\cdot}192\angle -43{\cdot}4^\circ$ V

١١ – ٢٥ استخدم نظرية ثفنين لإيجاد القدرة فى المقاومة 1 Ω المتصلة بين الطرفين AB فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ – ٤٧ .

الجواب : 2.22 W

١١ – ٢٦ كرر المسألة ١١ – ٢٥ باستخدام دائرة نورتن المكافئة .



شكل ١١ — ٤٧ شكل ١١ — ٤٨

١١— ٢٧ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١ — ٤٨ .

الجواب : $Z' = 10{\cdot}6\angle 45^\circ\ \Omega,\ V' = 11{\cdot}17\angle -63{\cdot}4^\circ\ V$

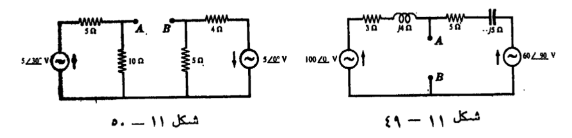
١١ — ٢٨ أوجد دائرة نورتن المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ — ٤٨ .

الجواب : $Z' = 10{\cdot}6\angle 45^\circ\ \Omega,\ I' = 1{\cdot}05\angle 251{\cdot}6^\circ\ A$

١١ — ٢٩ استخدم نظرية ثفنين لتحصل على القدرة فى المعاوقة $2 + j4\ \Omega$ المتصلة بين الطرفين AB فى الشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١ — ٤٩ .

الجواب : $475\ W$

١١ — ٣٠ كرر المسألة ١١ — ٢٩ باستخدام نظرية نورتن .



شكل ١١ — ٤٩ شكل ١١ — ٥٠

١١ — ٣١ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١ — ٥٠ .

الجواب : $Z' = 5{\cdot}55\angle 0^\circ\ \Omega,\ V' = 5{\cdot}9\angle 16{\cdot}4^\circ\ V$

١١ — ٣٢ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ — ٥٠ .

الجواب : $Z' = 5{\cdot}55\angle 0^\circ\ \Omega,\ I' = 1{\cdot}06\angle 16{\cdot}4^\circ\ A$

١١ — ٣٣ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١ — ٥١ .

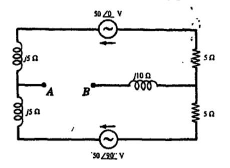
الجواب : $Z' = 2{\cdot}5 + j12{\cdot}5\ \Omega,\ V' = 25\sqrt{2}\angle 45^\circ\ V$

١١ — ٣٤ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ — ٥١

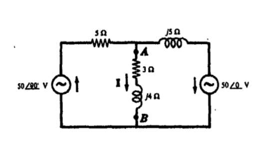
الجواب : $Z' = 2{\cdot}5 + j12{\cdot}5\ \Omega,\ I' = 2{\cdot}77\angle -33{\cdot}7^\circ\ A$

١١ - ٣٥ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١١ - ٥٢ أوجد التيار I المار فى المعاوقة $3 + j4\ \Omega$ وذلك باستبدال الشبكة الكهربائية بين الطرفين AB بدائرة ثفنين المكافئة .

الجواب : $Z' = 3{\cdot}53\angle 45^\circ\ \Omega,\ V' = 70{\cdot}7\angle 135^\circ\ V,\ I = 8{\cdot}3\angle 85{\cdot}2^\circ\ A$



شكل ١١ — ٥١



شكل ١١ — ٥٢

١١ - ٣٦ كرر المسألة ١١ - ٣٥ باستخدام دائرة نورتن المكافئة بين الطرفين AB .

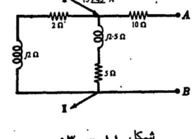
الجواب : $Z' = 3{\cdot}53\angle 45^\circ\ \Omega,\ I' = 20\angle 90^\circ\ A,\ I = 8{\cdot}3\angle 85{\cdot}2^\circ\ A$

١١ - ٣٧ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ - ٥٣ ، وصل تيار محرك $15\angle 45^\circ\ A$ بين النهايتين الموضحتين فى الرسم . ابدل الشبكة الكهربائية بين AB بدائرة ثفنين المكافئة .

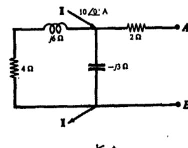
الجواب : $Z' = 11{\cdot}48 + j1{\cdot}19\ \Omega,\ V' = 28{\cdot}6\angle 83{\cdot}8^\circ\ V$

١١ - ٣٨ أوجد دائرة نورتن المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ - ٥٣ .

الجواب : $Z' = 11{\cdot}48 + j1{\cdot}19\ \Omega,\ I' = 2{\cdot}47\angle 77{\cdot}9^\circ\ A$



شكل ١١ — ٥٣



شكل ١١ — ٥٤

١١ - ٣٩ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ - ٥٤ .

الجواب : $Z' = 5{\cdot}34\angle -49{\cdot}8^\circ\ \Omega,\ V' = 43{\cdot}3\angle -70{\cdot}6^\circ\ V$

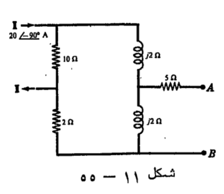
١١ - ٤٠ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ - ٥٤ .

الجواب : $Z' = 5{\cdot}34\angle -49{\cdot}8^\circ\ \Omega,\ I' = 8{\cdot}1\angle -20{\cdot}8^\circ\ A$

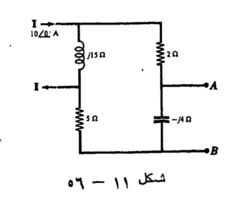
١١ – ٤١ استخدام نظرية ثفنين لتحصل على القدرة فى المعاوقة $Z = 10\angle 60^\circ\ \Omega$ المتصلة بين الطرفين AB فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ – ٥٥ .

الجواب : 23 W

١١ – ٤٢ كرر المسألة ١١ – ٤١ باستخدام دائرة نورتن المكافئة .



شكل ١١ – ٥٥



شكل ١١ – ٥٦

١١ – ٤٣ أوجد دائرة ثفنين المكافئة للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١ – ٥٦ .

الجواب :

$Z' = 5{\cdot}09\angle -82{\cdot}5^\circ\ \Omega,\ V' = 46{\cdot}2\angle\ 57{\cdot}5^\circ\ V$

١١ – ٤٤ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائيه الموضحة فى الشكل ١١ – ٥٦ .

الجواب :

$Z' = 5{\cdot}09\angle\ 82{\cdot}5^\circ\ \Omega,\ I' = 9{\cdot}05\angle 25^\circ\ A$

شكل ١١ – ٥٧

١١ – ٤٥ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١ – ٥٧ .

الجواب : $Z' = 6{\cdot}2\angle 51{\cdot}8^\circ\ \Omega,\ V' = 62{\cdot}6\angle 44{\cdot}17^\circ\ V$.

١١ – ٤٦ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ – ٥٧

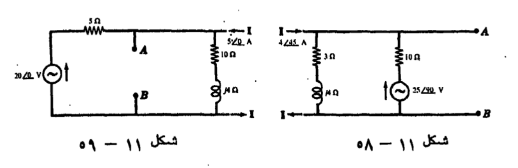
الجواب : $Z' = 6{\cdot}2\angle 51{\cdot}8^\circ\ \Omega,\ I' = 10{\cdot}1\angle -7{\cdot}63^\circ\ A$

١١ – ٤٧ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ – ٥٨ والتى تحتوى على مصدر التيار $4\angle 45^\circ A$ ومصدر الجهد $25\angle 90^\circ\ V$.

الجواب : $Z' = 3{\cdot}68\angle 36^\circ\ \Omega,\ V' = 22{\cdot}2\angle 98^\circ\ V$

١١ – ٤٨ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١١ – ٥٨ .

الجواب : $Z' = 3{\cdot}68\angle 36^\circ\ \Omega,\ I' = 6{\cdot}03\angle 62^\circ\ A$



شكل ١١ — ٥٩

شكل ١١ — ٥٨

١١ — ٤٩ أوجد دائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB الشكبة الكهربائية الفعالة الموضحة فى الشكل ١١ — ٥٩ .

الجواب : $Z' = 3{\cdot}47\angle 6{\cdot}85^\circ\ \Omega,\ V' = 31{\cdot}2\angle 6{\cdot}89^\circ\ V$

١١ — ٥٠ أوجد دائرة نورتن المكافئة الشبكة الموضحة فى الشكل ١١ — ٥٩ .

الجواب : $Z' = 3{\cdot}47\angle 6{\cdot}85^\circ\ \Omega,\ I' = 9{\cdot}0\angle 0^\circ\ A$

الفصل الثانى عشر

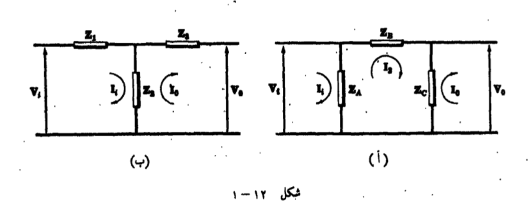
نظريات الشبكات الكهربائية

مقدمة :

باستخدام طريقتى تيار الشبيكة وجهد العقدة يمكننا حل معظم مسائل الدوائر الكهربية . ولقد ثبت فاعلية نظريتى ثفنين ونورتن الواردتين فى الفصل الحادى عشر فى اختصارات العمليات الحسابية وذلك عند وجود عديد من المعاوقات متصلة على انفراد من نهايتيها وبالمثل فإن النظريات الواردة فى هذا الفصل تصل بنا إلى نفس الغرض وهو تبسيط حل بعض الأنواع الخاصة للدوائر الكهربية . ولهذا فإنه يمكن اعتبار هذا الفصل امتدادا للفصل الحادى عشر .

تحويلات نجمة ــ دلتا (T — Δ)

يقال عن الشبكة الخاملة (غير الفعالة) ذات النهايات الثلاث والتى تتكون من ثلاث معاوقات Z_A و Z_B و Z_C والموضحة فى الشكل ١٢ — ١ (أ) بأنها تكون توصيلة على هيئة دلتا (Δ) أو π . ويقال عن الشبكة الخاملة (غير الفعالة) ذات النهايات الثلاث والتى تتكون من ثلاث معاوقات Z_1 و Z_2 و Z_3 والموضحة فى الشكل ١٢ — ١ (ب) بأنها تكون توصيلة على هيئة (ستار) نجمة أو شكل حرف T . والدائرتان متكافئتان إذا تساوت معاوقات الدخول والخروج وكذلك معاوقة الانتقال فى الدائرتين .



شكل ١٢ — ١

نفرض أن V_i هو الجهد الداخل وأن V_0 هو الجهد الخارج المقابل وذلك لكل دائرة . ونختار التيار الداخل I_i والتيار الخارج I_0 وذلك فى نفس اتجاه عقارب الساعة لكل دائرة . وأن تيار الشبيكة المتوسطة فى دائرة توصيل دلتا هو I_2 بالاتجاه الموضح .

وبذلك تكون معادلات تيار الشبكة فى الصيغة المصفوفية لدائرة توصيل دلتا هى

$$\begin{bmatrix} Z_A & -Z_A & 0 \\ -Z_A & Z_A + Z_B + Z_C & -Z_C \\ 0 & -Z_C & Z_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

وبذلك تكون معاوقات الدخول والخروج ومعاوقة الانتقال هى

$$Z_{input} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B}$$

$$Z_{output} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{33}} = \frac{Z_B Z_C}{Z_B + Z_C}$$

$$Z_{transfer\,10} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{13}} = Z_B$$

ومعادلات تيار الشبكة لدائرة اتصال نجمة الموضحة فى الشكل ١٢ - ١ (ب) هى :

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

وبذلك تكون معاوقات الدخول والخروج ومعاوقة الانتقال هى

$$Z_{input} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{output} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{22}} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z_{transfer\,10} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{12}} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2}$$

والآن بمساواة معاوقات دلتا بالمعاوقات النجمية نحصل على :

$$\frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2 + Z_3} \qquad (١)$$

$$\frac{Z_B Z_C}{Z_B + Z_C} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1 + Z_2} \qquad (٢)$$

$$Z_B = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2} \qquad (٣)$$

وبالتعويض عن Z_B من المعادلة (٣) فى المعادلتين (١) ، (٢) ثم بحلهما للحصول على Z_A و Z_C نحصل على

$$Z_A = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_3} \qquad (٤)$$

و

$$Z_C = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1} \qquad (٥)$$

وعلى ذلك فإنه يمكن ابدال دائرة توصيل نجمية معاوقاتها Z_1 و Z_2 و Z_3 بدائرة توصيل على هيئة دلتا معاوقاتها كما فى المعادلات (٣) ، (٤) ، (٥)

وللحصول على تحويل دلتا إلى نجمية نجمع المعادلات (٣) ، (٤) ، (٥) ثم نعكس المجموع فنجد أن :

$$\frac{1}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{Z_1Z_2Z_3}{(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)^2} \qquad (٦)$$

والآن بضرب الطرف الأيسر فى المعادلة (٦) فى Z_A Z_B والطرف الأيمن فى المعادلة (٦) بمايساوى Z_A من المعادلة (٤) و Z_B من المعادلة (٣) ، فنحصل على

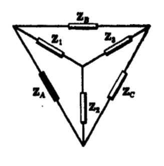
$$\left(\frac{1}{Z_A + Z_B + Z_C}\right)Z_AZ_B = \frac{Z_1Z_2Z_3}{(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)^2}\left(\frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_3}\right)\left(\frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2}\right)$$

ومنها نجد أن

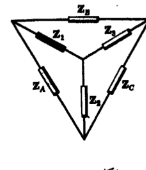
$$Z_1 = \frac{Z_AZ_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

وباستخدام طريقة مشابهة يمكن الحصول على Z_2 و Z_3 بدلالة Z_A و Z_B و Z_C . وللسهولة نجد فيما يلى النتيجة النهائية لتحويلات النجمة إلى دلتا .

التحويلات من النجمة إلى دلتا	التحويل من دلتا إلى النجمة
$Z_A = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_3}$	$Z_1 = \frac{Z_AZ_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$
$Z_B = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2}$	$Z_2 = \frac{Z_AZ_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$
$Z_C = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1}$	$Z_3 = \frac{Z_BZ_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$



شكل ١٢ — ٢



شكل ١٢ — ٣

وفيما يلى قاعدتان للتذكرة فى تعيين العلاقات السابقة :

١ — التحويل من النجمة إلى دلتا .

أى معاوقة فى دائرة دلتا تساوى مجموع كل احتمالات حاصل الضرب الزوجى لمعاوقات النجمة مقسوماً على المعاوقة المقابلة فى دائرة النجمة .

وبالاشارة إلى الشكل ١٢ — ٢ ، فإن Z_A تعطى بمجموع ثلاثة حواصل ضرب مقسوماً على Z_3 ، وهى المعاوقة المقابلة فى دائرة النجمة .

٢ — التحويل من دلتا إلى نجمة .

أى معاوقة فى دائرة النجمة تساوى حاصل ضرب المعاوقتين المجاورتين لها فى دائرة دلتا مقسوماً على مجموع الثلاث معاوقات الشكل دلتا .

وبالإشارة إلى الشكل ١٢ — ٣ ، فإن Z_1 تعطى بحاصل ضرب Z_A Z_B ، وهما المعاوقتان المجاورتان من معاوقات دائرة دلتا ، مقسوماً على مجموع معاوقات دلتا الثلاث .

نظرية التراكب

تنص نظرية التراكب على أن الاستجابة فى أى عنصر فى شبكة كهربائية خطية ذات جانبين وتحتوى على مصدرين أو أكثر تساوى مجموع الاستجابات التى نحصل عليها من كل عنصر عندما يؤثر بمفرده فى الدائرة وذلك مع وضع جميع العناصر الباقية مساوية الصفر

ومبدأ التراكب موجود ضمنياً فى طريقتى تيار الشبيكة وجهد العقدة لتحليل الشبكات . ولقد وجدنا أن تيارات الشبيكة وجهود العقد ، عبارة عن نسب بين محددتين (انظر الفصلين التاسع والعاشر) . وفك محددات البسط بدلالة عناصر العمود المحتوى على المصادر يعطينا معادلات من الشكل :

$$I_1 = V_1\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} + V_2\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} + V_3\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Z} + \cdots \quad (٧)$$

$$V_1 = I_1\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y} + I_2\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y} + I_3\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Y} + \cdots \quad (٨)$$

والحدود فى المعادلة (٧) هى مركبة التيارات لتيار الشبيكة I_1 الناتجة عن الجهود V_1 و V_2 . . الخ أما الحدود فى المعادلة (٨) فهى مركبات جهد العقدة V_1 الناتج عن التيارات I_1 و I_2 . . . الخ .

وإذا اخترنا تيارات الشبيكة بحيث تكون المصادر فى أفرع ذات تيارات غير مركبة . فإن الحدود فى المعادلة (٧) تكون مطابقة للتيارات الناتجة عن تأثير المصادر كل على حدة . وبالمثل إذا كانت تيارات مصادر الشبكة الكهربائية التى نحلها بطريقة جهد العقدة لها جميعاً نفس نقطة الرجوع ، فإذا اخترنا هذه النقطة كنقطة إسناد فإننا نجد أن الحدود فى المعادلة (٨) تكون مطابقة لجهود العقدة الناتجة عن تأثير المصادر كل على حدة .

ويطبق مبدأ التراكب فى تعيين التيارات وجهود العقدة المتعلقة خطياً بالمصادر التى تؤثر فى الشبكة الكهربائية . أما القدرة فلا يمكن تعيينها بالتراكب وذلك لأن العلاقة بين القدرة والتيار أو الجهد علاقة تربيعية .

نظرية التبادل

تنص نظرية التبادل على أنه فى أى شبكة خطية ذات جانبين بها مصدر واحد تكون النسبة بين الإثارة والاستجابة ثابتة وذلك عند تغيير موضعى الإثارة والاستجابة .

ويمكن اثبات هذه النظرية على أساس تيار الشبيكة فى حالة تأثير مصدر واحد فى الشبكة الكهربائية وذلك باعتبار المعادلة الآتية لتيار الشبيكة I_r .

$$I_r = V_1\frac{\Delta_{1r}}{\Delta_z} + V_2\frac{\Delta_{2r}}{\Delta_z} + \cdots + V_r\frac{\Delta_{rr}}{\Delta_z} + V_s\frac{\Delta_{sr}}{\Delta_z} + \cdots$$

وإذا فرضنا أن المصدر الوحيد فى الشبكة الكهربائية هو V_s . إذن

$$I_r = V_s\frac{\Delta_{sr}}{\Delta_z}$$

والنسبة بين الإثارة والاستجابة هى :

$$\frac{V_s}{I_r} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{sr}} = Z_{\text{transfer } sr} \quad (٩)$$

والآن عند تغيير موضعى الإثارة والاستجابة فإن المصدر يصبح $\mathbf{V}_r$ والتيار $\mathbf{I}_s$.

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{V}_r \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_z}$$

والنسبة بين الإثارة والاستجابة هى

$$\frac{\mathbf{V}_r}{\mathbf{I}_s} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{rs}} = \mathbf{Z}_{\text{transfer } rs} \qquad (١٠)$$

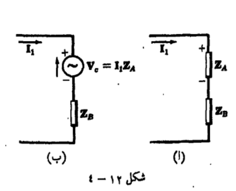
ولأى شبكة كهربائية خطية ذات جانبين تكون معاوقتى الانتقال فى المعادلتين (٩) و (١٠) متساويتين ، ذلك لأنه فى مثل هذه الشبكات الكهربائية تكون مصفوفة المعاوقة [Z] متماثلة بالنسبة للمحور الأساسى ، وتكون العوامل المشتركة Δ_{sr} و Δ_{rs} متساوية ولذلك فإن التيار فى الشبيكة الفرعية r الناتج عن مصدر الجهد فى الشبيكة الفرعية s يكون هو نفسه التيار فى الشبيكة الفرعية s عندما ننقل مصدر الجهد إلى الشبيكة الفرعية r . يجب ملاحظة أن التيارات فى الأجزاء الأخرى من الشبكة الكهربائية لاتظل كما هى .

تطبق نظرية التبادل أيضاً على الشبكات الكهربائية التى تحتوى على مصدر واحد للتيار . وفى هذه الحالة فإن النظرية تنص على أن الجهد الناتج بين طرفين $m\,n$ نتيجة لمصدر تيار يؤثر بين طرفين a, b يساوى الجهد بين الطرفين $a\,b$ عندما ننقل مصدر التيار ليؤثر بين الطرفين $m\,n$. ويجب ملاحظة أن الجهد فى الأجزاء الأخرى من الشبكة الكهربائية لايظل كما هو . انظر المسألة ١٢ — ٩ .

نظرية المعادلة :

يحدث على الشبكة الكهربائية التى تحتوى على معاوقة $\mathbf{Z}$ ويمر بها تيار $\mathbf{I}$ هبوط فى الجهد مقداره $\mathbf{IZ}$. وعلى حسب نظرية المعادلة فإن هذه المعاوقة يمكن استبدالها بقوة دافعة كهربائية معادلة ويكون مقدار وطور هذا المصدر مساويا لـ $\mathbf{IZ}$. وبالمثل إذا كان الجهد $\mathbf{V}$ على أى عنصر أو فرع فى شبكة كهربائية تحتوى على معاوقة $\mathbf{Z}$ ، فإن هـذا العنصر أو الفرع يمكن إبداله بمصدر تيار $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$. وبعد التعويض بالمصدر المعادل فإن التيارات أو الجهود فى الأجزاء الأخرى فى الشبكة الكهربائية تظل كما هى . وتسمى أيضا نظرية التعادل أو المعادلة بنظرية التعويض .

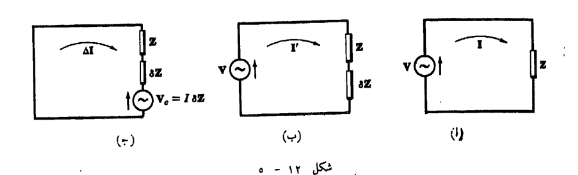
يوضح الشكل ١٢ — ٤ (ا) فرعا من شبكة كهربائية يحتوى على معاوقتين $\mathbf{Z}_A$ و $\mathbf{Z}_B$. فإذا كان التيار المار فى هذا الفرع هو $\mathbf{I}_1$ يكون الهبوط فى الجهد على $\mathbf{Z}_A$ هو $\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_A$ بالقطبية الموضحة . يوضح الشكل ١٢ — ٤ (ب) المصدر المعادل $\mathbf{V}_c = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_A$ والذى يوضع بدلا من $\mathbf{Z}_A$. والمصدر $\mathbf{V}_c$ يجب أن يكون مستقطبا كما هو موضح فى الشكل وذلك لأن رؤوس الأسهم تتجه إلى النهاية الموجبة .



شكل ١٢ — ٤

إذا حدث أى تغيير فى الشبكة الكهربائية بحيث تتأثر قيمة $\mathbf{I}_1$ به فإن المصدر المعادل يجب بالتالى أن تتغير قيمته ، ولهذا السبب فإن المصدر المعادل $\mathbf{V}_c$ يسمى مصدرا غير مستقل .

ويستفاد بنظرية المعادلة فى تعيين التغير الذى يحدث فى تيار وجهد عنصر ما فى الدائرة وذلك عندما تتغير قيمة معاوقته . ويحدث هذا فى دوائر القنطرة ومقياس الجهد حيث يحدث تغير بسيط فى معاوقة ما ينتج عنه انحراف عن شرط الاتزان :

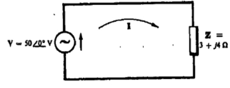


شكل ١٢ - ٥

فى الشكل ١٢ - ٥ (ا) يؤثر المصدر V على الدائرة وينتج عنه تيار $I = V/Z$. فى الشكل ١٢-٥ (ب) تغيرت قيمة معاوقة الدائرة الكلية إلى $(Z + \delta Z)$ إذن يصبح تيار الدائرة $I' = V/(Z + \delta Z)$. والآن يوجد عندنا المصدر المعادل $V_c = 1\,\delta Z$ يؤثر فى الدائرة التى تحتوى على Z و δZ « وذلك مع وضع المصدر الأصلى مساويا للصفر » وينتج عنه تيار ΔI كما هو موضح فى الشكل ١٢ - ٥ (ج) . ΔI هو التغير فى التيار الذى ينتج عن التغير δZ فى معاوقة الدائرة - ونجد من نظرية التراكب أن $I + \Delta I = I'$ أو $\Delta I = I' - I$

مثال :

فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٢-٦ تتغير قيمة المعاوقة $3 + j4\ \Omega$ إلى $5 + j5\ \Omega$ ، أى أن $\delta Z = 2 + j1\Omega$. أوجد التغير الحادث فى التيار وذلك باستخدام الحسابات المباشرة ثم حقق النتيجة بتطبيق نظرية المعادلة .



شكل ١٢ - ٦

لدينا قبل التغيير

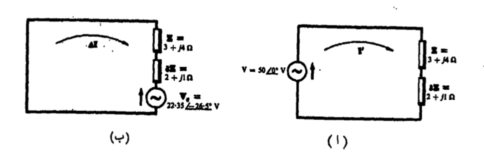
$$I = V/Z = (50\angle 0°)/(5\angle 53{\cdot}1°) = 10\angle -53{\cdot}1°\ A$$

وعند إضافة δZ إلى الدائرة كما هو موضح فى الشكل ١٢ - ٧ (ا) يكون لدينا .

$$I' = V/(Z + \delta Z) = (50\angle 0°)/(5 + j5) = 7{\cdot}07\angle -45°\ A$$

ويكون التغيير الناتج فى التيار هــو

$$\Delta I = I' - I = (5 - j5) - (6 - j8) = -1 + j3 = 3{\cdot}16\angle 108{\cdot}45°\ A$$



(ب) (ا)

شكل ١٢ - ٧

بتطبيق نظرية المعادلة يكون المصدر المعادل هو $V_e = I\delta Z = (10\angle -23.1^\circ)(2 + j1) = 22.35 \angle -26.5^\circ$ V،
وبادخال هذا المصدر فى الدائرة التى تحتوى على Z و δZ ووضع المصدر $50\angle 0^\circ$ مساويا للصفر كما هو موضح فى الشكل ١٢ - ٧ (ب) ، فإن التغيير فى التيار يكون

$$\Delta I = -\frac{V_e}{Z + \delta Z} = -\frac{22.35\angle -26.5^\circ}{5 + j5} = 3.16\angle 108.45^\circ \text{ A}$$

وعلى ذلك عندما نريد حساب التغيير فى التيار ΔI المقابل للتغيير الحادث فى معاوقة دائرة فإن ΔI تعين بجعل المصدر المعادل V_e يؤثر فى الشبكة الكهربائية ونضع جميع المصادر الأخرى مساوية للصفر .

نظريات انتقال أكبر قدرة :

تحدد نظريات انتقال أكبر قدرة التالية قيم معاوقات الحمل التى ينتج أكبر قدرة عبر نهايات شبكة كهربائية فعالة .

نعتبر مجموعة مصادر متصلة على التوالى متصل معها معاوقة مركبة ثابتة تعطى قدرة إلى حمل يتكون من مقاومة متغيرة أو معاوقة مركبة متغيرة .

الحالة الأولى : الحمل يتكون من مقاومة متغيرة R_L (شكل ١٢ - ٨)

التيار المار فى الدائرة هو

$$I = \frac{V_g}{(R_g + R_L) + jX_g}$$

$$I = |I| = \frac{V_g}{\sqrt{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}}$$

شكل ١٢ - ٨

إذن القدرة المعطاة للمقاومة R_L هى

$$P = I^2 R_L = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}$$

لتعيين قيمة R_L التى يكون انتقال القدرة عندها إلى الحمل أكبر ما يمكن نضع المشتقة التفاضلية الأولى dP/dR_L مساوية الصفر .

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{d}{dR_L}\left[\frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}\right] = V_g^2\left\{\frac{[(R_g + R_L)^2 + X_g^2] - R_L(2)(R_g + R_L)}{[(R_g + R_L)^2 + X_g^2]^2}\right\} = 0$$

أو

$$R_g^2 + 2R_gR_L + R_L^2 + X_g^2 - 2R_LR_g - 2R_L^2 = 0$$

و

$$R_g^2 + X_g^2 = R_L^2$$

إذن

$$R_L = \sqrt{R_g^2 + X_g^2} = |\mathbf{Z}_g|$$

وعلى ذلك فعندما يكون الحمل مقاومة نقية متغيرة فإننا نحصل على أكبر قدرة من نهايتى شبكة كهربائية فعالة عندما تكون قيمة مقاومة الحمل مساوية للقيمة المطلقة لمعاوقة الشبكة الكهربائية الفعالة .

وإذا كانت المركبة الممانعة للمعاوقة المتصلة على التوالى مع المصدر مساوية للصفر ، أى أن $X_g = 0$ فإن أكبر قدرة تنتقل إلى الحمل عندما تتساوى قيمتا الحمل ومقاومة المصدر ، أى أن $R_L = R_g$.

الحالة الثانية : الحمل يتكون من معاوقة $\mathbf{Z}_L$ مقاومتها وممانعتها متغيرتان (شكل ١٢-٩) .

تيار الدائرة هـو .

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{(R_g + R_L) + j(X_g + X_L)}$$

$$I = |\mathbf{I}| = \frac{V_g}{\sqrt{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2}}$$

$\mathbf{Z}_g = R_g + jX_g$ ، A ، $\mathbf{I}$ ، $\mathbf{V}_g$ ، $\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$ ، B

شكل ١٢ – ٩

والقدرة المعطاة بالمصدر هى

$$P = I^2 R_L = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2} \qquad (11)$$

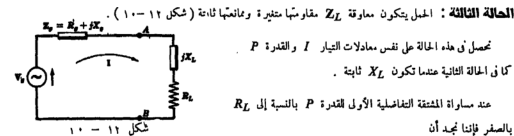
إذا ثبتنا قيمة R_L فى (١١) فإن قيمة P تكون أكبر ما يمكن عندما $X_g = -X_L$. إذن المعادلة (١١) تصبح

$$P = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2}$$

نعتبر الآن قيمة R_L متغيرة وكما فى الحالة الأولى فإن أكبر قدرة تعطى للحمل عندما $R_L = R_g$ وإذا كانت $R_L = R_g$ و $X_L = -X_g$ فإن $Z_L = Z_g^*$

مما سبق يتضح أنه إذا كانت معاوقة الحمل تتكون من مقاومة متغيرة وممانعة متغيرة ، فإننا نحصل على أكبر قدرة من طرفى شبكة كهربائية فعالة عندما تكون معاوقة الحمل Z_L مساوية لمرافق المعاوقة المركبة Z_g للشبكة الكهربائية .

الحالة الثالثة : الحمل يتكون معاوقة Z_L مقاومتها متغيرة وممانعتها ثابتة (شكل ١٢ - ١٠) .



شكل ١٢ - ١٠

نحصل فى هذه الحالة على نفس معادلات التيار I والقدرة P كما فى الحالة الثانية عندما تكون X_L ثابتة .

عند مساواة المشتقة التفاضلية الأولى للقدرة P بالنسبة إلى R_L بالصفر فإننا نجد أن

$$R_L^2 = R_g^2 + (X_g + X_L)^2$$

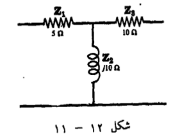
و

$$R_L = |Z_g + jX_L|$$

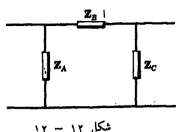
بما أن قيمة كل من Z_g و X_L ثابتة فإنه يمكن جمعهما فى معاوقة واحدة . وعندما تكون R_L متغيرة فإن الحالة الثالثة تؤول إلى الحالة الأولى ، وتنتج أكبر قدرة عندما تكون R_L مساوية للقيمة المطلقة لمعاوقة الشبكة الكهربائية

مسـائل محلولة

١٢ - ١ عين دائرة دلتا المكافئة للمعاوقات المتصلة على شكل النجمة الموضحة فى الشكل ١٢-١١ .



شكل ١٢ - ١١



شكل ١٢ - ١٢

تحتوى دائرة دلتا المكافئة على Z_A و Z_B و Z_C كما فى الشكل ١٢–١٢ .

$$Z_A = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_3} = \frac{5(j10) + 5(10) + 10(j10)}{10} = \frac{50 + j150}{10} = 5 + j15\,\Omega$$

$$Z_B = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2} = \frac{50 + j150}{j10} = 15 - j5\,\Omega$$

$$Z_C = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1} = \frac{50 + j150}{5} = 10 + j30\,\Omega$$

وكاختبار للنتيجة نحول معاوقات دائرة دلتا الموضحة فى الشكل ١٢–١٢ مرة اخرى إلى دائرة النجمة – إذن

$$Z_1 = \frac{Z_AZ_B}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(5 + j15)(15 - j5)}{5 + j15 + 15 - j5 + 10 + j30} = \frac{150 + j200}{30 + j40} = 5\,\Omega$$

$$Z_2 = \frac{Z_AZ_C}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(5 + j15)(10 + j30)}{30 + j40} = j10\,\Omega$$

$$Z_3 = \frac{Z_BZ_C}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(15 - j5)(10 + j30)}{30 + j40} = 10\,\Omega$$

١٢ – ٢ مجموعة متصلة على شكل دلتا تتكون من ثلاث معاوقات متساوية $Z\Delta = 15\angle 30^\circ\,\Omega$. أوجد المعاوقات المكافئة المتصلة على شكل النجمة .

$$Z_1 = \frac{Z_AZ_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad \text{حيث} \quad Z_A = Z_B = Z_C = Z_\Delta$$

إذن $Z_1 = Z_\Delta/3 = (15\angle 30^\circ)/3 = 5\angle 30^\circ\,\Omega$ وبالمثل $Z_2 = Z_3 = Z_\Delta/3 = 5\angle 30^\circ\,\Omega$

وعلى ذلك فإن أى دائرة على شكل دلتا بثلاث معاوقات متطابقة لها دائرة نجمة مكافئة معاوقتها تساوى ثلث معاوقات دائرة دلتا .

وبالعكس فعندما تتساوى معاوقات دائرة على شكل النجمة فإن معاوقات دائرة دلتا المكافئة لها تكون أيضا متساوية وتساوى ثلاث أضعاف معاوقات دائرة النجمة .

١٢ – ٣ بين أنه يمكن ابدال الشبكة الكهربائية المتعددة الخاملة ذات الأطراف الثلاثة بثلاث معاوقات متصلة على شكل دلتا .

شكل ١٢ — ١٣

نجعل مصدر جهد V_1 يؤثر على طرفى الجهة اليسرى فى الشبكة الكهربائية . ونرمز أيضاً بـ V_2 ، I_2 عند طرفى الجهة اليمنى كما هو موضح . بما أن الشبكة الكهربائية خاملة فإن جميع المصادر المحركة الأخرى تساوى صفرا .

أن معادلات تيار الشبيكة فى الصيغة المصفوفية هى

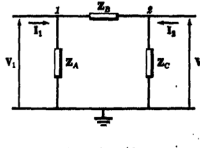
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{n1} & \cdots & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن $I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} + V_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}$ و $I_2 = V_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} + V_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z}$

و الآن بالتعبير عن هاتين المعادلتين الآنيتين بالصيغة المصفوفية نجد أن :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} & \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

وهذه المعادلة المصفوفية مشابهة للمعادلة الناتجة من شبكة كهربالية ذات عقد ثلاث وذلك مع اختيار واحدة منها كعقدة إسناد . الشكل ١٢–١٤ يوضح مثل هذه الشبكة التى فيها Z_A و Z_B و Z_C متصلة على شكل دلتا . بادخال V_1 و I_1 و V_2 و I_2 بنفس الاتجاه الموضح فى الشكل ١٢–١٣ وكتابة المعادلات المقابلة فى الصيغة المصفوفية عن طريق تطبيق طريقة جهد العقدة نحصل على



شكل ١٢ — ١٤

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}\right) & -\frac{1}{Z_B} \\ -\frac{1}{Z_B} & \left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

بمساواة معاملات العناصر فى المصفوفتين ، نجد أن

$$(١) \quad \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}\right) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} \qquad (٢) \quad \left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}\right) = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z}$$

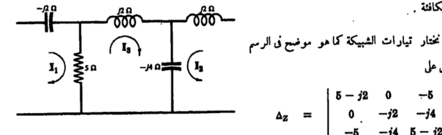
$$(٣) \quad -\frac{1}{Z_B} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}$$

وبالتعويض فى (١) ، (٢) بـ (٣) نحصل على

$$Z_A = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11} + \Delta_{21}}, \qquad Z_B = -\frac{\Delta_Z}{\Delta_{21}}, \qquad Z_C = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22} + \Delta_{21}}$$

مما سبق يتضح أنه يمكن رياضيا تحويل أى شبكة كهربائية ذات ثلاثة أطراف إلى دائرة مكافئة على شكل دلتا أو النجمة . ولكن عناصر كل دائرة مكافئة ربما لا يكون لها معنى فيزيائى . أنظر المسألة ١٢–٤ .

١٢ – ٤ طبق نتيجة المسألة ١٢ – ٣ على الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ١٥ لتحصل على دائرة دلتا المكافئة .



شكل ١٢ — ١٥

نختار تيارات الشبيكة كما هو موضح فى الرسم فنحصل على

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 5-j2 & 0 & -5 \\ 0 & -j2 & -j4 \\ -5 & -j4 & 5-j2 \end{vmatrix} = 40 - j24 = 46{\cdot}6\angle -31^\circ$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -j2 & -j4 \\ -j4 & 5-j2 \end{vmatrix} = 12 - j10, \qquad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 5-j2 & -5 \\ -5 & 5-j2 \end{vmatrix} = -4 - j20,$$

$$\Delta_{21} = (-)\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -j4 & 5-j2 \end{vmatrix} = j20$$

باستخدام تعبيرات المسألة ١٢–٣ نجـد أن

$$Z_A = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11} + \Delta_{21}} = \frac{46{\cdot}6\angle -31^\circ}{12 - j10 + j20} = 2{\cdot}98\angle -70{\cdot}8^\circ\ \Omega$$

$$Z_B = -\frac{\Delta_Z}{\Delta_{21}} = -\frac{46{\cdot}6\angle -31^\circ}{j20} = 2{\cdot}33\angle 59^\circ\ \Omega$$

$$Z_C = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22} + \Delta_{21}} = \frac{46{\cdot}6\angle -31^\circ}{-4 - j20 + j20} = 11{\cdot}65\angle 149^\circ\ \Omega$$

لاحظ أن المعاوقة Z_A يمكن تحقيقها بمقاومة ومكثف متصلين على التوالى و Z_B بمقاومة وحث متصلين على التوالى . أما تحقيق المعاوقة Z_C يلزمه مقاومة سالبة . وعلى ذلك فإن الدائرة ذات الثلاث مقاومات المحسوبة لا يمكن تحقيقها .

١٢ - ٥ باستخدام نظرية التراكب أوجد التيار المار فى المقاومة 2Ω فى الدائرة الموضحة فىالشكل ١٢-١٦ .

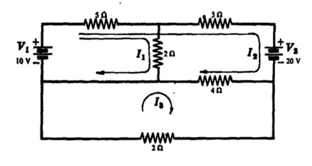
نفرض أن I' هو التيار المار فىالمقاومة 2Ω نتيجة للمصدر V_1 وذلك مع وضع المصدر V_2 مساويا للصفر . وأن I'' هو التيار المار فى نفس الفرع نتيجة للمصدر V_2 مع وضع V_1 مساويا للصفر . باختيار تيارات الشبيكة كما هو موضح فى الشكل ١٢ - ١٦ وحل المعادلات للحصول على I' و I'' نجد أن

$$I' = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & 5 & 0 \\ V_1 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 5 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{10\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = 1{\cdot}075 \text{ A}$$

$$I'' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -V_2 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = \frac{-(-20)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = 2{\cdot}48 \text{ A}$$

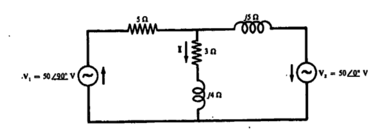
بتطبيق نظرية التراكب يكون التيار I_1 الناتج عن وجود المصدرين فى آن واحد هـــو

$$I_1 = I' + I'' = 1{\cdot}075 + 2{\cdot}48 = 3{\cdot}555 \text{ A}$$



شكل ١٢ — ١٦

١٢ - ٦ طبق نظرية التراكب على الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ - ١٧ لتحصل على التيار المار فى المعاوقة $3 + j4\,\Omega$



شكل ١٢ — ١٧ .

نضع $V_2 = 0$ وبذلك يكون V_1 هو المصدر الوحيد الموجود فى الدائرة . إذن

$$Z_{T_1} = 5 + \frac{(3+j4)j5}{3+j9} = 5.83 + j2.5 = 6.35\angle 23.2^\circ \ \Omega$$

و

$$I_{T_1} = \frac{V_1}{Z_{T_1}} = \frac{50\angle 90^\circ}{6.35\angle 23.2^\circ} = 7.87\angle 66.8^\circ \ \text{A}$$

والتيار المار فى الفرع $3 + j4\ \Omega$ نتيجة للمصدر V_1 فقط هو

$$I_1 = I_{T_1}\left(\frac{j5}{3+j9}\right) = 7.87\angle 66.8^\circ\left(\frac{j5}{3+j9}\right) = 4.15\angle 85.3^\circ \ \text{A}$$

بوضع $V_1 = 0$ وبذلك يكون V_2 هو المصدر الوحيد فى الدائرة . إذن

$$Z_{T_2} = j5 + \frac{5(3+j4)}{8+j4} = 2.5 + j6.25 = 6.74\angle 68.2^\circ \ \Omega$$

و

$$I_{T_2} = \frac{V_2}{Z_{T_2}} = \frac{50\angle 0^\circ}{6.74\angle 68.2^\circ} = 7.42\angle -68.2^\circ \ \text{A}$$

والتيار المار فى الفرع $3 + j4\ \Omega$ نتيجة للمصدر V_2 فقط هو

$$I_2 = -(7.42\angle -68.2^\circ)\left(\frac{5}{8+j4}\right) = 4.15\angle 85.3^\circ \ \text{A}$$

وبذلك يكون التيار الكلى المار فى الفرع $3 + j4\ \Omega$ هو

$$I = I_1 + I_2 = 4.15\angle 85.3^\circ + 4.15\angle 85.3^\circ = 8.30\angle 85.3^\circ \ \text{A}$$

١٢ – ٧ طبق نظرية التراكب على الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ١٨ وذلك لإيجاد الجهد V_{AB} .

نفرض أن المصدر $I_1 = 2$ A يؤثر فى الشبكة الكهربائية ونضع المصدر $I_2 = 0$

إذن $V'_{AB} = 2\frac{5(12)}{17} = 7.06$ V.

نضع الآن $I_1 = 0$ وبذلك يكون $I_2 = 4$ A هو الذى يؤثر فى الشبكة الكهربائية وبذلك يكون التيار المار فى المقاومة 5Ω هو

$$I_5 = 4(2/17) = 8/17 \text{ A}$$

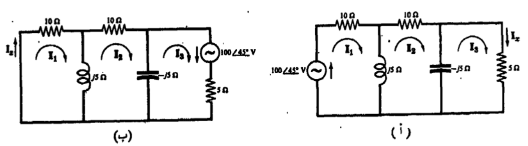
إذن $V''_{AB} = (8/17)5 = 2.35$ volts.

شكل ١٢ — ١٨

وعلى هذا فإن الجهد V_{AB} فى حالة وجود المصدرين معاهو

$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB} = 7.06 + 2.35 = 9.41 \text{ V}$$

١٢ – ٨ إذا كان التيار I_x هو التيار المار فى الفرع $5\ \Omega$ فى الشبكة الكهربائية وحيده المصدر فى الشكل ١٢ – ١٩ (ا) والناتج عن مصدر الجهد $100\angle 45°$ V ، فأوجد I_x ثم حقق نظرية التبادل لهذه الدائرة .



شكل ١٢ — ١٩

يوضح الشكل ١٢–١٩ (ا) تيارات الشبيكة I_1 وI_2 وI_3 . التيار المطلوب I_x هو تيار الشبيكة I_3 .

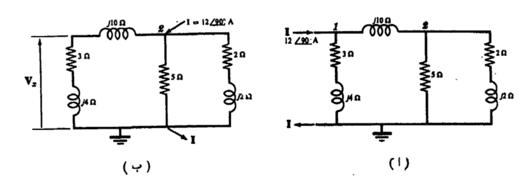
$$(١)\quad I_x = I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 10+j5 & -j5 & 100\angle 45° \\ -j5 & 10 & 0 \\ 0 & j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 10 & j5 \\ 0 & j5 & 5-j5 \end{vmatrix}} = 100\angle 45° \left(\frac{25}{1155\angle -12.5°}\right) = 2.16\angle 57.5° \text{ A}$$

والآن نطبق نظرية التبادل بتغيير موضعى الإثارة والاستجابة كما هو موضح فى الشكل ١٢–١٩ (ب) . ومرة أخرى باستخدام تيارات المسار المغلق الأولى فى اتجاه عقارب الساعة كما هو موضح وبملاحظة أن $I_x = I_1$ ، إذن

$$I_x = I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -j5 & 0 \\ 0 & 10 & j5 \\ 100\angle 45^\circ & j5 & 5-j5 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 100\angle 45^\circ \left(\frac{25}{1155\angle -12{\cdot}5^\circ}\right) = 2{\cdot}16\angle 57{\cdot}5^\circ \text{ A} \quad (٢)$$

وبمقارنة نتيجتى (١) و (٢) نجـد أن قيمتى I_x فى المعادلتين مساويتان وهذا يحقق نظرية التبادل .

١٢ – ٩ تحتوى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢–٢٠ (١) على مصدر واحد للتيار هو $I = 12\angle 90^\circ$ A. عين الجهد V_2 عند العقدة 2 . طبق نظرية التبادل ثم قارن النتيجتين .



(ب) (١)

شكل ١٢ — ٢٠

إن معادلتى العقدة فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢–٢٠ (١) بالصيغة المصفوفية هى :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3+j4}+\frac{1}{j10}\right) & -\frac{1}{j10} \\ -\frac{1}{j10} & \left(\frac{1}{j10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2+j2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\angle 90^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنها نجـد أن

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0{\cdot}12-j0{\cdot}26 & 12\angle 90^\circ \\ j0{\cdot}1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{\cdot}12-j0{\cdot}26 & j0{\cdot}1 \\ j0{\cdot}1 & 0{\cdot}45-j0{\cdot}35 \end{vmatrix}} = 12\angle 90^\circ \left(\frac{-j0{\cdot}1}{0{\cdot}161\angle 260{\cdot}35^\circ}\right) = 7{\cdot}45\angle 99{\cdot}65^\circ \text{ V}$$

نستخدم نظرية التبادل مع اعتبار أن التيار I بين العقدة 2 وعقدة الإسناد فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٢-٢٠ (ب) . ثم نحسب الجهد بين النهايتين نتيجة للمصدر المحرك السابق . بما أنه يوجد عقدتان فقط فى الشبكة الكهربائية فإن المطلوب معادلة عقدة واحدة .

إذن

$$\left(\frac{1}{3+j14}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2+j2}\right) V_2 = 12\angle 90^\circ$$

ومنها نجد أن

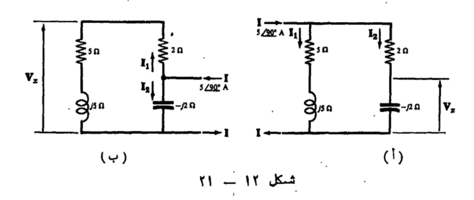
$$V_2 = \frac{12\angle 90^\circ}{0{\cdot}563\angle -34{\cdot}4^\circ} = 21{\cdot}3\angle 124{\cdot}4^\circ \text{ V}$$

وبالتالى فإن الجهد V_x يكون

$$V_x = V_2\left(\frac{3+j4}{3+j4+j10}\right) = 21{\cdot}3\angle 124{\cdot}4^\circ\left(\frac{3+j4}{3+j14}\right) = 7{\cdot}45\angle 99{\cdot}6^\circ \text{ V}$$

بمقارنة القيمة المحسوبة للجهد V_2 للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ - ٢٠ (أ) بالجهد V_x للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ - ٢٠ (ب) نجد أنهما متساويان ، وهذا يحقق نظرية التبادل . لاحظ أيضا أن V_2 لا يظل كما هو بعد تغيير موضعى الإثارة والاستجابة .

١٢ – ١٠ أوجد الجهد V_x فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٢ - ٢١ (أ) والتى تحتوى على مصدر واحد للتيار. غير موضعى مصدر التيار والجهد الناتج V_x . هل تتحقق نظرية التبادل ؟



شكل ١٢ — ٢١

فى الشكل ١٢ - ٢١ (أ) نجد أن التيار

$$I_2 = I\left(\frac{5+j5}{7+j3}\right) = 5\angle 90^\circ\left(\frac{5+j5}{7+j3}\right) = 4{\cdot}64\angle 111{\cdot}8^\circ \text{ A}$$

إذن الجهد

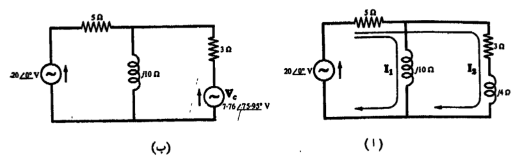
$$V_x = I_2(-j2) = 4{\cdot}64\angle 111{\cdot}8^\circ\,(2\angle -90^\circ) = 9{\cdot}28\angle 21{\cdot}8^\circ \text{ V}$$

إذا بدلنا موضعى مصدر التيار I والجهد V_x المقاس بين النهايتين كما فى الشكل ١٢ - ٢١ (ب) ، يكون التيار فى هذه الحالة هو

$$I_1 = I\left(\frac{-j2}{7+j3}\right) = 5\angle 90^\circ\left(\frac{-j2}{7+j3}\right) = 1{\cdot}31\angle -23{\cdot}2^\circ \text{ A}$$

. وبما أن $V_x = 1{\cdot}31\angle -23{\cdot}2^\circ (5+j5) \; 9{\cdot}27\angle 21{\cdot}8 \text{ V}$ كما فى الحالة السابقة ، إذن فهذا يحقق نظرية التبادل .

١٢ - ١١ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢-٢٢ (أ) ابدل الممانعة $j4\ \Omega$ بقوة دافعة كهربائية معادلة .



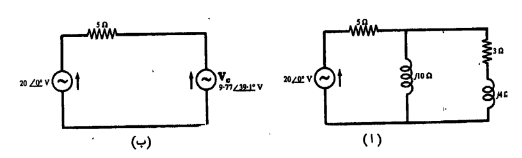
شكل ١٢ — ٢٢

نختار تيارات الشبيكة I_1 ، I_2 كما هو موضح فى الرسم ثم نحل المعادلات لحصول على التيار I_3 المار فى الممانعة $j4\ \Omega$ فنجـــد أن

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j10 & 20 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j10 & 5 \\ 5 & 8+j4 \end{vmatrix}} = \frac{20(j10)}{108\angle 104{\cdot}05^\circ} = 1{\cdot}94\angle -14{\cdot}05^\circ\ \text{A}$$

والمصدر المعادل هو $\mathbf{V}_e = \mathbf{I}_2(j4) \angle -14{\cdot}05^\circ\ (j4) = 7{\cdot}76\angle 75{\cdot}95^\circ\ \text{V}$. يوضح الشكل ١٢-٢٢ (ب) الدائرة بعد وضع المصدر المعادل بدلا من الممانعة $j4\Omega$. لإثبات أن الدائرتين متكافئتان أوجـــد تيار أحد الأفرع فى الدائرتين وقارن النتيجتين .

١٢ - ١٢ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ - ٢٣ (أ) ابدل المجموعة المتصلة على التوازى والمكونة من $j10\ \Omega$ و $3+j4\ \Omega$ بمصدر معادل .



شكل ١٢ — ٢٣

المعاوقة المكافئة للمجموعة المتصلة على التوازى هى

$$Z_{eq} = \frac{j10(3+j4)}{3+j14} = 1{\cdot}46 + j3{\cdot}17 = 3{\cdot}50\angle 65{\cdot}3^\circ\ \Omega$$

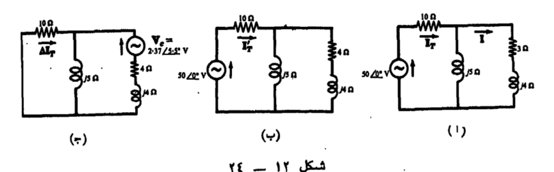
إذن $Z_T = 5 + 1{\cdot}46 + j3{\cdot}17 = 7{\cdot}18\angle 26{\cdot}2^\circ\ \Omega$ و $I_T = \frac{V}{Z_T} = \frac{20\angle 0^\circ}{7{\cdot}18\angle 26{\cdot}2^\circ} = 2{\cdot}79\angle -26{\cdot}2^\circ$ A

والمصدر المعادل هو :

$$V_e = I_T Z_{eq} = 2{\cdot}79\angle -26{\cdot}2^\circ\ (3{\cdot}50\angle 65{\cdot}3^\circ) = 9{\cdot}77\angle 39{\cdot}1^\circ\ V$$

ويوضح الشكل ١٢ – ٢٣ (ب) الدائرة بعد وضع مصدر الجهد المعادل بالقطبية الفعلية .

١٢ – ١٣ إذا تغيرت المعاوقة $3+j4\ \Omega$ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢–٢٤ (ا) إلى المعاوقة $4+j4\ \Omega$ كما فى الشكل ١٢ –٢٤ (ب) . فأوجد التيار المار فى المقاومة $10\ \Omega$ قبل وبعد التغيير . ثم طبق نظرية التعادل أو المعادلة لتعين الفرق فى تيارى المقاومة $10\ \Omega$.



شكل ١٢ — ٢٤

قبل التغير فى المعاوقة $3+j4\Omega$ (شكل ١٢ – ٢٤ (ا)) لدينا

$$Z_T = 10 + \frac{j5(3+j4)}{3+j9} = 11{\cdot}1\angle 13^\circ\ \Omega \quad , \quad I_T = \frac{V}{Z_T} = \frac{50\angle 0^\circ}{11{\cdot}1\angle 13^\circ} = 4{\cdot}50\angle -13^\circ\ A$$

بعد التغير (شكل ١٢ – ٢٤ (ب)) لدينا

$$Z'_T = 10 + \frac{j5(4+j4)}{4+j9} = 11{\cdot}03 + j2{\cdot}68 = 11{\cdot}35\angle 13{\cdot}65^\circ\ \Omega \quad , \quad I'_T = \frac{V}{Z'_T} = 4{\cdot}41\angle -13{\cdot}65^\circ\ A$$

ومصدر التعادل الجهدى $V_e = I(\delta Z)$ حيث I التيار الابتدائى فى الفرع $3+j4\Omega$ هو

$$I \quad I_T\left(\frac{j5}{3+j9}\right) = 4{\cdot}5\angle -13^\circ\left(\frac{j5}{3+j9}\right) = 2{\cdot}37\angle 5{\cdot}5^\circ\ A$$

و $\delta \mathbf{Z} = (4 + j4) - (3 + j4) = 1\ \Omega$. إذن $\mathbf{V}_c = 2{\cdot}37\angle 5{\cdot}5^\circ(1) = 2{\cdot}37\angle 5{\cdot}5^\circ\ \Omega$ و اتجاهه فى عكس اتجاه $\mathbf{I}$.

ونحصل على التغيير $\Delta \mathbf{I}_T$ فى التيار بوضع مصدر الجهد الأساسى مساويا للصفر مع ترك $\mathbf{V}_c$ يؤثر بمفرده فى الدائرة كما فى الشكل ١٢-٢٤ (جـ) . إذن لهذه الدائرة يكون لدينا $\mathbf{Z}_T{}' = 4 + j4 + \dfrac{j5(10)}{10 + j5} = 10\angle 53{\cdot}1^\circ\ \Omega$

و

$$\Delta \mathbf{I}_T = -\left(\frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{Z}_T}\right)\left(\frac{j5}{10 + j5}\right) = -\left(\frac{2{\cdot}37\angle 5{\cdot}5^\circ}{10\angle 53{\cdot}1^\circ}\right)\left(\frac{j5}{10 + j5}\right) = 0{\cdot}1055\angle 195{\cdot}8^\circ\ \text{A}$$

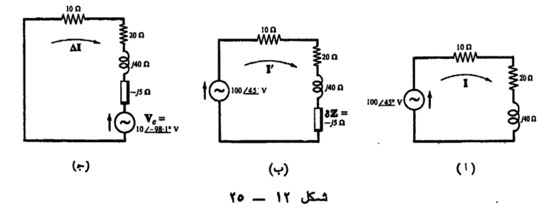
نقارن ΔI_T بالفرق بين I'_T و I_T

$$\mathbf{I}' - \mathbf{I}_T = (4{\cdot}41\angle -13{\cdot}65^\circ) - (4{\cdot}50\angle -13^\circ) = -0{\cdot}10 - j0{\cdot}03 = 0{\cdot}1045\angle 196{\cdot}7^\circ\ \text{A}$$

لاحظ أن قيمتى $\Delta \mathbf{I}_T$ غير متساويتين تماما . إن قيمة $\Delta \mathbf{I}_T$ المحسوبة باستخدام جهد التعادل $\mathbf{V}_c$ أكثر دقة من قيمة $\Delta \mathbf{I}_T$ التى حصلنا عليها من طرح التيارين الأساسيين $\mathbf{I}_T$ و $\mathbf{I}'_T$. وهذه النتيجة صحيحة تماما عندما يكون التغير فى المعاوقة صغير . والنتيجة السابقة لحالة التى يكون فيها تغيير التيار صغير تقتضى اعتبار وجود خطأ عند حساب الفرق بين كميتين متقاربتين فى القيمة .

١٢-١٤ احسب التغير فى تيار الدائرة المتصلة على التوالى والموضحة فى الشكل ١٢ - ٢٥ (أ) وذلك عندما تقل قيمة الممانعة إلى $j\,35\Omega$.

نفرض أن $\mathbf{I}$ و $\mathbf{I}'$ هما تيارا الدائرة قبل وبعد التغيير الحادث فى الممانعة كما هو موضح فى الشكل ٢٢ - ٢٥ (أ) ، (ب) . إذن



شكل ١٢ — ٢٥

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{100\angle 45^\circ}{50\angle 53{\cdot}1^\circ} = 2{\cdot}0\angle -8{\cdot}1^\circ\ \text{A};\ \mathbf{I}' = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z}} = \frac{100\angle 45^\circ}{30 + j35} = 2{\cdot}17\angle -4{\cdot}4^\circ\ \text{A}$$

و

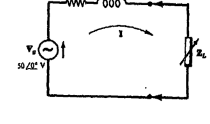
$$\Delta\mathbf{I} = \mathbf{I}' - \mathbf{I} = 2{\cdot}17\angle -4{\cdot}4^\circ - 2{\cdot}0\angle -8{\cdot}1^\circ = 0{\cdot}223\angle 31{\cdot}6^\circ\ \text{A}$$

إذا حسبنا ΔI بتطبيق نظرية التعادل نحصل على $V_c = I(\delta Z) = 2{\cdot}0\angle{-8{\cdot}1^\circ}(-j5) = 10\angle{-98{\cdot}1^\circ}\ V$

واتجاهه كما فى الشكل ١٢–٢٥ (جـ) . والتغيير فى التيار هو

$$\Delta I = -V_c/(Z + \delta Z) = -(10\angle{-98{\cdot}1^\circ})/(30 + j35) = (10\angle{81{\cdot}9^\circ})/(46{\cdot}1\angle{49{\cdot}4^\circ}) = 0{\cdot}217\angle{32{\cdot}5^\circ}\ A$$

١٢ – ١٥ إذا كان الحمل المتصل بالدائرة الموضحة فى الشكل ١٢ – ٢٦ يتكون من مقاومة نقية R_L . فأوجد قيمة R_L التى تكون عندها القدرة المعطاة بالمصدر للحمل أكبر ما يمكن . عين قيمة أكبر قدرة .



شكل ١٢ — ٢٦

تنتقل أكبر قدرة للحمل عندما

$$R_L = |Z_g| = |10 + j20| = 22{\cdot}4\ \text{ohms}$$

والآن لدينا $I = V/(Z_g + R) = (50\angle 0^\circ)/(10 + j20 + 22{\cdot}4) = 1{\cdot}31\angle{-31{\cdot}7^\circ}\ A$

وأكبر قدرة تعطى للحمل هى

$$P = I^2R_L = (1{\cdot}31)^2 22{\cdot}4 = 38{\cdot}5\ \text{watts.}$$

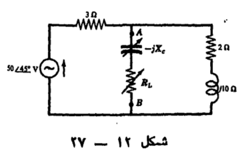
١٢ – ١٦ إذا كان الحمل المتصل بالدائرة الموضحة فى الشكل ١٢ – ٢٦ يتكون من معاوقة مركبة Z_L التى فيها كل من R_L و X_L متغيرة ، فعين قيمة Z_L التى ينتج عنها انتقال أكبر قدرة . احسب قيمة أكبر قدرة .

تنتقل أكبر قدرة عندما يكون $Z_L = Z_g^*$. وبما أن $Z_g = 10 + j20\ \Omega$ $= 10 - 20\ \Omega$

إذن المعاوقة الكلية للدائرة هى $Z_T = (10 + j20) + (10 - j20) = 20\ \Omega$.

إذن $I = V/Z_T = (50\angle 0^\circ)/20 = 2{\cdot}5\angle 0^\circ\ A$ و $P = I^2R_L = (2{\cdot}5)^2 10 = 62{\cdot}5\ \text{watts}$

١٢ – ١٧ إذا كان الحمل المتصل بين النهايتين AB للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٢٧ يتكون من مقاومة متغيرة R_L وممانعة سعوية X_C تتغير قيمتها بين 2Ω و 8Ω ، فعين R_L و X_C الذى ينتج عندهما انتقال أكبر قدرة . احسب أكبر قدرة P معطاة للحمل .



شكل ١٢ — ٢٧

إن جهد ثفنين بين الطرفين AB هو $\mathbf{V}' = \dfrac{50\angle 45^\circ}{5 + j10}(2 + j10) = 45{\cdot}6\angle 60{\cdot}3^\circ$ V ومعاوقة الشبكة الكهربائية الفعالة المتصلة بين النهايتين AB هى $\mathbf{Z}' = 3(2 + j10)/(5 + j10) = 2{\cdot}64 + j0{\cdot}72\,\Omega$.

ويحدث أن تنتقل أكبر قدرة فى الدائرة المعطاة عندما $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}'^* = 2{\cdot}64 - j0{\cdot}72\,\Omega$. وحيث أن الشرط المعطى فى المسألة هو أن X_C تتغير قيمتها بين 2Ω و $8\,\Omega$ ، إذن أقرب قيمة لـ X_C هى 2Ω

و

$$R_L = |\mathbf{Z}_g - jX_C| = |2{\cdot}64 + j0{\cdot}72 - j2| = |2{\cdot}64 - j1{\cdot}28| = 2{\cdot}93 \text{ ohms}$$

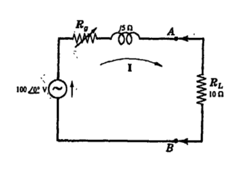
والآن لدينا

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}' + \mathbf{Z}_L = (2{\cdot}64 + 2{\cdot}93) + j(0{\cdot}72 - 2) = 5{\cdot}57 - j1{\cdot}28 = 5{\cdot}70\angle -13^\circ\,\Omega$$

إذن

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}'}{\mathbf{Z}_T} = \frac{45{\cdot}6\angle 60{\cdot}3^\circ}{5{\cdot}70\angle -13^\circ} = 8{\cdot}0\angle 73{\cdot}3^\circ \text{ A} \quad , \quad P = I^2R_L = (8{\cdot}0)^2 2{\cdot}93 = 187{\cdot}5 \text{ W}$$

١٢ – ١٨ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٢ – ٢٨ تتغير قيمة المقاومة R_g بين 2Ω و 55Ω . ما هى قيمة R_g التى ينتج عندها انتقال أكبر قدرة عبر الطرفين AB ؟



شكل ١٢ — ٢٨

بما أن مقاومة الحمل R_L فى الدائرة المعطاة ثابتة . إذن نظريات انتقال أكبر قدرة لا تطبق فى هذه الحالة . ومن الواضح أن أكبر تيار ينتج عندما R_g تكون أقل ما يمكن .

بوضع $R_g = 2\Omega$. إذن

$$\mathbf{Z}_T = (2 + j5 + 10) = 13\angle 22{\cdot}6^\circ\,\Omega$$

و

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}_T = 100\angle 0^\circ/(13\angle 22{\cdot}6^\circ) = 7{\cdot}7\angle -22{\cdot}6^\circ \text{ A}$$

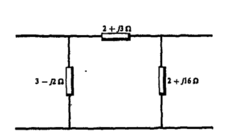
وأكبر قدرة هى

$$P = (7{\cdot}7)^2 10 = 593 \text{ W.}$$

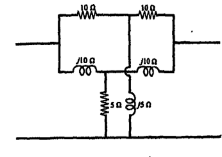
مسائل اضافية

١٢ – ١٩ أوجد مجموعة المعاوقات المتصلة على شكل النجمة المكافئة لمجموعة المعاوقات المتصلة على شكل دلتا والموضحة فى الشكل ١٢ – ٢٩ .

الجواب : $(0{\cdot}5 - j0{\cdot}5)\,\Omega,\ (3 - j1)\,\Omega,\ (1 + j3)\,\Omega$



شكل ١٢ — ٢٩



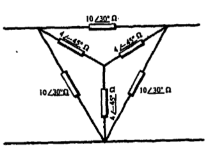
شكل ١٢ — ٣٠

١٢ – ٢٠ تتركب الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢–٣٠ من دائرتين متصلتين على التوازى كل منهما على شكل النجمة . أوجد المجموعة المكافئة لها بحيث تكون على شكل دلتا واحدة .

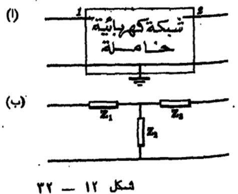
الجواب : $(5 + j5)\,\Omega,\ \infty,\ (5 + j5)\,\Omega$

١٢ – ٢١ فى الشكل ١٢–٣١ وصلت مجموعة دلتا المتزنة والتى فيها $Z = 10\angle 30^\circ\ \Omega$ على التوازى مع مجموعة النجمة المتزنة والتى فيها $Z = 4\angle -45^\circ\ \Omega$. أوجد مجموعة النجمة المكافئة لهما .

الجواب : $Z = 2{\cdot}29\angle -3{\cdot}5^\circ\ \Omega$



شكل ١٢ — ٣١

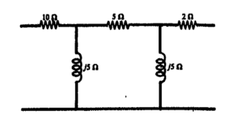


شكل ١٢ — ٣٢

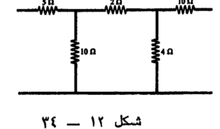
٢٢ – بين أنه يمكن عموما ابدال الشبكة الكهربائية الحاملة ذات النهايات الثلاث والموضحة فى الشكل ١٢ – ٣٢ (أ) بدائرة متصلة على شكل النجمة مثل الموضحة فى الشكل ١٢–٣٢ (ب) ، حيث $Z_1 = (\Delta_{11} - \Delta_{12})/\Delta_Y$ و $Z_2 = \Delta_{12}/\Delta_Y$ و $Z_3 = (\Delta_{22} - \Delta_{12})/\Delta_Y$ (تشير Δ_Y والمعاملات المشتركة إلى معادلات جهد العقدة فى الصيغة المصفوفية) .

٢٣ – استخدم طرق المسألة ١٢ – ٢٢ وذلك لإبدال الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٣٣ بدائرة مكافئة متصلة على شكل النجمة .

الجواب : $(12 + j1)\,\Omega, (-1 + j2)\,\Omega, (4 + j1)\,\Omega$



شكل ١٢ — ٣٣



شكل ١٢ — ٣٤

٢٤ – أوجد الثلاثة معاوقات المتصلة على شكل النجمة والتى تكافئ الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٣٤

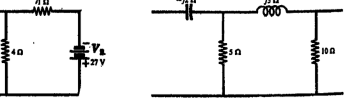
الجواب : $6{\cdot}25\,\Omega, 2{\cdot}5\,\Omega, 10{\cdot}5\,\Omega$

٢٥ – بالإشارة إلى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢–٣٤ أوجد دائرة دلتا المكافئة لها .

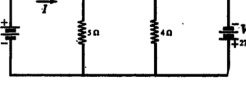
الجواب : $10{\cdot}25\,\Omega, 43\,\Omega, 17{\cdot}2\,\Omega$

٢٦ – أوجد دائرة دلتا المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٣٥ .

الجواب : $(3 - j2)\,\Omega, (2 + j3)\,\Omega, (2 + j16)\,\Omega$



شكل ١٢ — ٣٥



شكل ١٢ — ٣٦

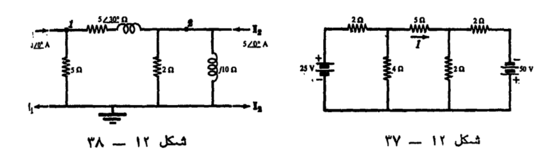
١٢ – ٢٧ باستخدام نظرية التراكب أوجد التيار المار فى المقاومة 2Ω فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢–٣٦ .

الجواب : $I = 4.27$ A

١٢ – ٢٨ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢–٣٦ إذا تغير مصدر الجهد V_2 إلى $8.93V$ وذلك مع اعتبار النهاية الموجبة له إلى أعلى ، فأوجد باستخدام نظرية التراكب التيار المار فى المقاومة 2Ω .

الجواب : $I = 1.43$ A

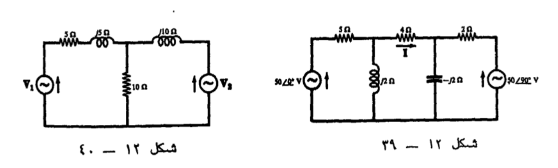
١٢ – ٢٩ أوجد فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٣٧ التيار المار فى المقاومة 5Ω نتيجة لكل مصدر من مصدرى الجهد . الجواب : 2.27 A, 3.41 A



شكل ١٢ — ٣٨ شكل ١٢ — ٣٧

١٢ – ٣٠ عين للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢–٣٨ مركبات جهد العقدة V_2 الناتجة عن كل مصدر من مصادر التيار . الجواب : $8{\cdot}48\angle{-2{\cdot}8^\circ}$ V, $8{\cdot}20\angle{12{\cdot}2^\circ}$ V

١٢ – ٣١ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٣٩ . أوجد التيار المار فى المقاومة $4\ \Omega$ والناتج عن كل مصدر من مصدرى الجهد . الجواب . $3{\cdot}24\angle{60{\cdot}95^\circ}$ A, $6{\cdot}16\angle{-142{\cdot}2^\circ}$ A



شكل ١٢ — ٤٠ شكل ١٢ — ٣٩

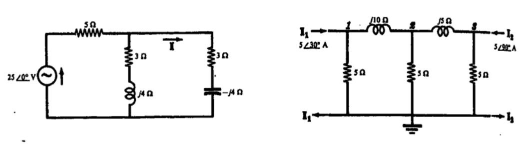
١٢ – ٣٢ إذا فرضنا فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٤٠ أن مصدرى الجهد يؤثر كل منهما فى الدائرة على حدة . فإذا كان التياران الناتجان فى المقاومة $10\ \Omega$ متساويين . فما هى قيمة النسبة V_1/V_2 ؟

الجواب : $0.707\angle{45^\circ}$

١٢ – ٣٣ أوجد فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٤١ مركبات جهد العقدة V_2 الناتجة عن كل مصدر من مصدرى التيار I_1 و I_2 .

الجواب : $5.82\angle{-5.5^\circ}$ V, $9.22\angle{72.9^\circ}$ V

١٢ – ٣٤ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٤١ إذا تغير مصدر التيار I_2 إلى $3.16\angle{191.6^\circ}$ A فعين جهد العقدة V_2 باستخدام نظرية التراكب .



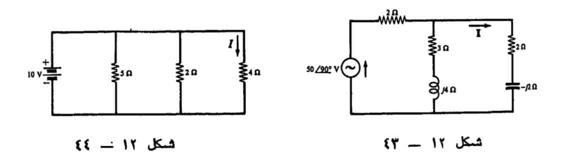
شكل ١٢ – ٤٢ شكل ١٢ – ٤١

١٢ – ٣٥ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢–٤٢ أوجد التيار I المار فى المعاوقة $3 - j4\Omega$. طبق نظرية التبادل ثم قارن بين التيارين .

الجواب : $2.27\angle{53.2^\circ}$ A

١٢ – ٣٦ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢–٤٣ أوجد التيار I المار فى المعاوقة $2 - j2\Omega$. طبق نظرية التبادل ثم قارن بين التيارين .

الجواب : $10.1\angle{129.1^\circ}$ A



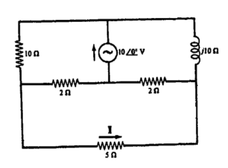
شكل ١٢ – ٤٤ شكل ١٢ – ٤٣

١٢ – ٣٧ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٤٤ أوجد التيار المار فى المقاومة 4 Ω طبق نظرية التبادل وقارن بين التيارين . ما هو التغير فى التيار المار فى الفرعين 5 Ω و 2Ω ؟

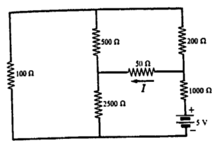
الجواب : 2.5 A ، بعد تطبيق نظرية التبادل نجد أن تيار الفرعين 5 Ω و 2 Ω يساوى صفرا . وكان التيار المار فيهما قبل ذلك يساوى 2A و 5A على الترتيب .

١٢ – ٣٨ أوجد فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٤٥ التيار المار فى المقاومة $5\,\Omega$. طبق نظرية التبادل ثم قارن بين التيارين .

الجواب : $0.270\,\angle 53.75°\,A$



شكل ١٢ — ٤٥



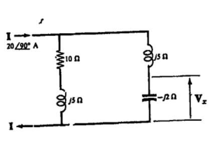
شكل ١٢ — ٤٦

١٢ – ٣٩ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٤٦ احسب التيار I المار فى المقاومة 50Ω . حقق نظرية التبادل وذلك بتغيير موضعى مصدر الجهد والتيار الناتج I .

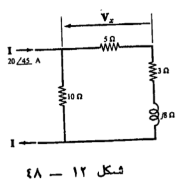
الجواب : $1.32\,m\,A$

١٢ – ٤٠ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٢ – ٤٧ عين الجهد V_x . ثم طبق نظرية التبادل وقارن بين الجهدين .

الجواب : $35\,\angle -12.1°\,V$



شكل ١٢ — ٤٧



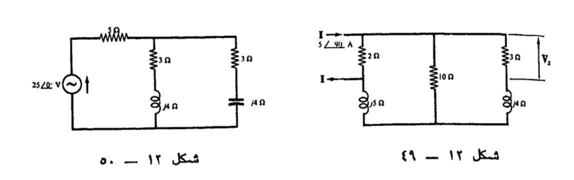
شكل ١٢ — ٤٨

١٢ – ٤١ أوجد V_x فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٢ – ٤٨ ثم حقق نظرية التبادل .

الجواب : $50.8\,\angle 21°\,V$

١٢ – ٤٢ أوجد الجهد V_x فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٤٩ . غير موضعى مصدر التيار والجهد V_x وحقق نظرية التبادل .

الجواب : $2.53\,\angle -162.3°\,V$



شكل ١٢ — ٥٠

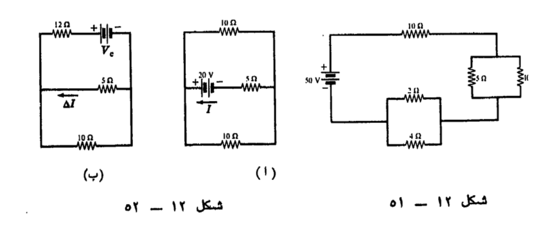
شكل ١٢ — ٤٩

١١ - ٤٣ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ — ٥٠ ابدل المعاوقتين $3+j4\,\Omega$ و $3-j4\Omega$ المتصلتين على التوازى بمصدر جهد معادل . كاختبار أوجد التيار المار فى المقاومة $5\,\Omega$ قبل وبعد التعويض .

الجواب : $V_e = 11{\cdot}35\angle 0°\,V, I = 2{\cdot}73\angle 0°\,A$

١١ - ٤٤ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ — ٥٠ ابدل المقاومة 5Ω بمصدر جهد معادل ثم أوجد التيار الكلى الناتج عد المصدر $25\angle 0°\,V$ قبل وبعد التعويض .   الجواب : $V_e = 13{\cdot}65\angle 0°\,V, I = 2{\cdot}73\angle 0\,A$

١١ - ٤٥ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢—٥١ ابدل كل مجموعة مقاومات متصلة على التوازى بمصدر جهد معادل ثم احسب التيار الكلى الخارج من المصدر 50 volt.   الجواب · 11·35 V, 4·55 V, 3·41 A



(ب)   (أ)

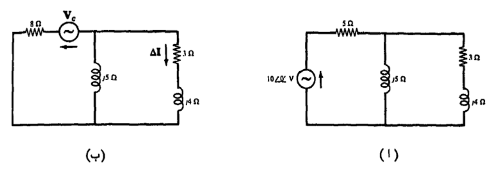
شكل ١٢ — ٥٢

شكل ١٢ — ٥١

١١ - ٤٦ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ — ٥٢ (أ) يحتوى مصدر الجهد 20 volt على تيار I ، فإذا تغير التيار الخارج من المصدر إلى I' عندما تغيرت المقاومة $10\,\Omega$ العلوية إلى $12\,\Omega$ ، فأوجد التغير فى التيار $(I'-I)$ ΔI وذلك باستخدام مصدر الجهد المعادل كما هو موضح فى الشكل ١٢ — ٥٢ (ب) .

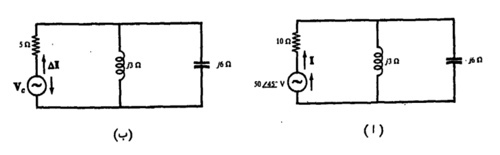
الجواب : $\Delta I = -0.087\,A$

١٢ - ٤٧ إذا تغيرت المقاومة $5\,\Omega$ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ - ٥٣ (أ) إلى $8\,\Omega$ فعين التغيير ΔI الناتج فى التيار المار فى المعاوقة $3 + j4$ الجواب : $0{\cdot}271 \angle 159.5^\circ$ A



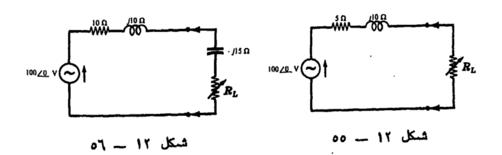
شكل ١٢ — ٥٣

١٢ - ٤٨ يحتوى المصدر $50\angle 45^\circ$ V فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ - ٥٤ (أ) على تيار I . فإذا تغيرت المقاومة $10\,\Omega$ إلى $5\,\Omega$ ، فأوجد V_c و ΔI الموضحين فى الشكل ١٢ - ٥٤ (ب) وذلك باستخدام نظرية التعادل . الجواب : $21{\cdot}45\angle 166^\circ$ V, $2{\cdot}74\angle -36^\circ$ A .



شكل ١٢ — ٥٤

١٢ - ٤٩ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٢ - ٥٥ أوجد قيمة R_L التى ينتج عنها انتقال أكبر قدرة . احسب قيمة أكبر قدرة . الجواب : 11·17 ohms, 309 W



شكل ١٢ — ٥٦

شكل ١٢ — ٥٥

١٢ – ٥٠ إذا كان الحمل فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢ – ٥٦ يتكون من ممانعة سعوية ثابتة مقدارها $15\ \Omega$ ومقاومة متغيرة R_L . فأوجد (ا) : قيمة R_L التى ينتج عنها أكبر قدرة ، (ب) قيمة أكبر قدرة .

الجواب : (ا) $R_L = 11.17\ \Omega$ (ب) $236\ W$

١٢ – ٥١ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢–٥٧ يؤثر مصدرا جهد على معاوقة الحمل المتصلة بالنهايتين AB . فإذا تغير كل من الممانعة ومقاومة الحمل – فما هى معاوقة الحمل Z_L التى تستقبل أكبر قدرة ؟

الجواب : $(4{\cdot}23 + j1{\cdot}15)\ \Omega,\ 5{\cdot}68\ W$

شكل ١٢ — ٥٧

الفصل الثالث عشر

الحث التبادلى

مقدمة :

تتكون الشبكات الكهربائية التى درست فى الفصول السابقة من مسارات مغلقة أو شبكات فرعية وعقد . وبما أن كل مسارين مغلقين لهما عقد مشتركة وكل عقدتين مرتبطتين بعناصر خاملة أو فعالة ، فإنه يقال إن الشبكات الفرعية والعقد مرتبطة توصيلياً وقد أعطيت طرق لحل هذه الشبكات الكهربائية .

وفى هذا الفصل نحلل نوعاً آخر من الارتباط يسمى الارتباط المغناطيسى . وعندما نأخذ فى الاعتبار تفاعل مسارين مغلقين خلال مجال مغناطيسى بدلا من خلال عناصر مشتركة فإنه يقال إن المسارات المغلقة مرتبطة حثياً أو مغناطيسياً .

الحث الذاتى :

عندما يتغير التيار فى دائرة كهربائية ، فإن الفيض المغناطيسى الممتد فى الدائرة نفسها يتغير وينتج قوة دافعة كهربائية تأثيرية فى الدائرة . وبفرض أن نفاذية الوسط ثابتة فإن القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية تتناسب مع معدل تغير التيار ، أى أن

$$v_L = L\frac{di}{dt} \qquad (١)$$

حيث يسمى ثابت التناسب L بالحث الذاتى للدائرة . ووحدة الحث الذاتى هى henry (H)

وتعطى القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية الناتجة فى ملف عدد لفاته N بالمعادلة

$$v_L = N\frac{d\varphi}{dt} \qquad (٢)$$

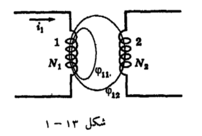
حيث $N\,d\varphi$ هو الفيض الممتد فى الدائرة . من المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على

$$L\frac{di}{dt} = N\frac{d}{dt} \qquad (٣)$$

ومنها نجد أن

$$L = N\frac{d\varphi}{di} \qquad (٤)$$

الحث التبادلي :



شكل ١٣ - ١

اعتبر أن التيار i_1 المار فى الملف 1 فى الشكل ١٣ - ١ يتغير مع الزمن . وعلى ذلك فإن التيار المتغير i_1 ينتج عنه فيض مغناطيسى φ_1 . جزء من هذا الفيض يمتد داخل الملف فقط ويسمى بالفيض المتسرب φ_{11} . أما الفيض الباقى φ_{21} فهو يمتد فى الملف 2 كما هو موضح فى الرسم . ويعطى الجهد التأثيرى فى الملف 2 بقانون فاراداى :

$$v_2 = N_2 \frac{d_{12}}{dt} \qquad (٣)$$

بما أن φ_{12} تعتمد على التيار i_1 فإن v_2 يتناسب مع معدل تغير i_1 ، أو

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} \qquad (٤)$$

حيث يسمى ثابت التناسب M بالحث التبادلى بين الملفين . ووحدة الحث التبادلى هى نفس وحدة الحث الذاتى (H) .
من المعادلتين (٣) ، (٤) نجد أن

$$v_2 = N_2\frac{d\varphi_{12}}{dt} = M\frac{di_1}{dt}$$

و

$$M = N_2\frac{d\varphi_{12}}{di_1} \qquad (٥)$$

وفى حالة لف مجموعة من الملفات حول قلب حديدى واحد فإن العلاقة بين الفيض والتيار تكون علاقة غير خطية ويعطى الحث التبادلى فى هذه الحالة بالمعادلة (٥) . أما إذا كان الوسط الممتد فى الملفات هو الهواء فإن العلاقة بين الفيض والتيار تكون علاقة خطية ويعطى الحث التبادلى فى هذه الحالة بالمعادلة

$$M = \frac{N_2\varphi_{12}}{i_1} \qquad (٦)$$

والربط التبادلى ذو جانبين ، أى أننا نحصل على نتائج مشابهة إذا مر تيار i_1 يتغير مع الزمن فى الملف 2 الموضح فى الشكل ١٣ - ١ فى هذه الحالة يكون الفيض الممتد هو φ_2 و φ_{21} و φ_{22} ويعطى الجهد التأثيرى فى الملف 1 بالمعادلة $v_1 = M(di_2/dt)$ (٩) وتصبح المعادلتان (٥) ، (٦) على الصورة التالية على الترتيب .

$$M = \frac{N_1 d\varphi_{21}}{di_2} \qquad M = \frac{N_1\varphi_{21}}{i_2} \qquad (٧)$$

معامل الربط k :

يعتمد الفيض الممتد فى الشكل ١٣ - ١ على المسافة الفاصلة بين محورى الملفين وعلى اتجاههما وكذلك على نفاذية الوسط . ويسمى جزء الفيض الذى يمتد فى الملفات من الفيض الكلى بمعامل الربط k . أى أن

$$k = \frac{\varphi_{12}}{\varphi_1} = \frac{\varphi_{21}}{\varphi_2} \qquad (٨)$$

حيث $\varphi_{12} \le \varphi_1$ و $\varphi_{21} \le \varphi_2$ ، وأكبر قيمة لـ k تساوى الوحدة .

ويمكن الحصول على تعبير لـ M بدلالة الحثين الذاتيين L_1 و L_2 كما يلى :
بضرب المعادلة (٦) فى المعادلة (٨) نحصل على

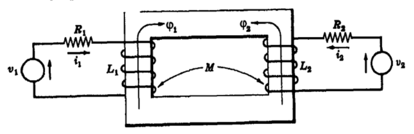
$$M^2 = \left(\frac{N_2\varphi_{12}}{i_1}\right)\left(\frac{N_1\varphi_{21}}{i_2}\right) = \left(\frac{N_2 k\varphi_1}{i_1}\right)\left(\frac{N_1 k\varphi_2}{i_2}\right) = k^2\left(\frac{N_1\varphi_1}{i_1}\right)\left(\frac{N_2\varphi_2}{i_2}\right) \qquad (٩)$$

بالتعويض عن $L_1 = N_1\varphi_1/i_1$ ، $L_2 = N_2\varphi_2/i_2$ فى (٩) نحصل على

$M^2 = k^2 L_1 L_2$ و $M = k\sqrt{L_1 L_2}$.

تحليل الدوائر المترابطة :

لكى نوضح اتجاه اللف وتأثيره على الجهود الحثية التبادلية نرى فى شكل ١٣ - ٢ ملفين ملفوفين على قلب ما .



شكل ١٣ - ٢

حيث أن كل دائرة تحتوى على مصدر للجهد فإننا نختار تيارات الشبيكة i_1 و i_2 فى نفس اتجاه المصادر ثم نكتب معادلتى الشبيكة باستخدام قانون كيرشوف للجهد .

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} \pm M\frac{di_2}{dt} &= v_1 \\ R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} \pm M\frac{di_1}{dt} &= v_2 \end{aligned} \qquad (١٠)$$

وتعتمد قطبية جهود الحث التبادلى على اتجاه اللف . ولتعيين الإشارة الصحيحة فى المعادلة (١٠) نطبق قاعدة اليد اليمنى على كل ملف ، مع جعل الأصابع تلف فى اتجاه التيار المفروض . وفى هذه الحالة يشير ابهام اليد اليمنى إلى اتجاه الفيض . وبالتالى يكون

الاتجاه الموجب للكميتين φ_1 و φ_2 كما هومبين بالشكل . إذا كان الفيضان φ_1 و φ_2 الناتجان عن اتجاهات التيار الموجبة المفروضة يساعد كل منهما الآخر ، فإن إشارات الجهود الحثية التبادلية تكون مثل إشارات الجهود الحثية الذاتية . وبالإشارة إلى الشكل ١٣ – ٢ نلاحظ أن اتجاه كل من φ_1 و φ_2 يعاكس كل منهما الآخر . وبإعادة كتابة المعادلة (١٠) بالإشارات الصحيحة نحصل على .

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = v_1 \qquad (١١)$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = v_2$$

وبفرض مصادر جيبية للتيار فإن مجموعة المعادلة (١١) فى الحالة الجيبية المستقرة تصبح

$$(R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 \qquad (١٢)$$

$$-j\omega M \mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_2$$

وبالرجوع إلى المجموعة العامة لمعادلتى تيار الشبيكة الآتيتين (الفصل التاسع) نحصل على

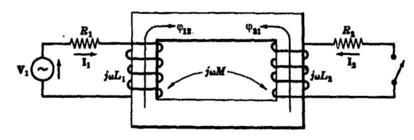
$$\mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 \pm \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 \qquad (١٣)$$

$$\pm \mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_2$$

ولقد وجدنا أن $\mathbf{Z}_{21} = \mathbf{Z}_{12}$ هما المعاوقتان المشتركتان لتيارى الشبيكة $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$. والشبيكات الفرعية مرتبطة توصيلياً وذلك لمرور التيارات فى فرع مشترك . والآن لدينا للدائرة الموضحة فى الشكل ١٣ – ٢ مجموعة معادلات مشابهة للمعادلات (١٣) ، وفى الأولى $j\omega M$ تقابل $\mathbf{Z}_{12}$ و $\mathbf{Z}_{21}$ الموجودين فى المعادلتين (١٣) . والشبيكات الفرعية غير مرتبطة توصيلياً وذلك لأن التيارين ليس لهما معاوقات مشتركة . وعلى ذلك فالمعادلات تدل على عدم وجود ارتباط وفى هذه الحالات فإن الارتباط يسمى بالارتباط التبادلى أو الارتباط المغناطيسى .

التيار الطبيعى :

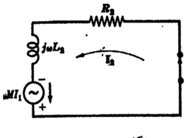
لقد درسنا فى الفقرة السابقة دائرة تتكون من مسارين مغلقين مرتبطين تبادلياً يحتوى كل منهما على مصدر للجهد وذلك بعد فرض الاتجاهات الصحيحة للتيارات . ويلزمنا فى نفس الوقت دراسة التيار الطبيعى الناتج فى مسار مغلق لايحتوى على جهود دافعة أو محركة . ويتحدد اتجاه هذا التيار بتطبيق قانون لينز .



شكل ١٣ – ٣

اعتبر الدائرة الموضحة فى الشكل ١٣ – ٣ والتى فيها الشبيكة الفرعية 1 هى فقط التى تحتوى على جهد محرك . نختار التيار I_1 بحيث يتفق اتجاهه مع المصدر V_1 ونطبق قاعدة اليد اليمنى لتعيين اتجاه الفيض φ_{12} . والآن فإن قانون لينز ينص على أن قطبيه الجهد التأثيرى تكون بحيث إذا أكملنا الدائرة فإن التيار يمر خلال الملف فى اتجاه يتحدد بحيث يكون الفيض الناتج معاكساً للفيض الأصلى الناشىء عن التيار I_1 . وعلى هذا فعند إغلاق المفتاح فى دائرة الشكل ١٣ – ٣ يكون اتجاه الفيض φ_{21} كما هو مبين فى الشكل وذلك تبعاً لقانون لينز . والآن بتطبيق قاعدة اليد اليمنى مع جعل الابهام يشير إلى اتجاه φ_{21} فإن الأصابع سوف تدور حول الملف 2 فى اتجاه التيار الطبيعى . وتكون إذن معادلات تيار الشبيكة هى

$$\begin{aligned} (R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_2 &= V_1 \\ -j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2)I_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (١٤)$$



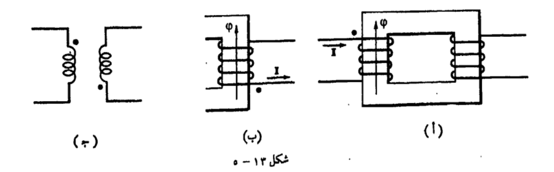
شكل ١٣ – ٤

وبما أن الشبيكة الفرعية 2 لاتحتوى على جهد وبالتالى فإن التيار الطبيعى I_2 ينتج عن الجهد التأثيرى التبادلى ؛ $(R_2 + j\omega L_2)$ $I_2 = (j\omega MI_1)$ وفى الشكل ١٣ – ٤ رسم هذا الجهد كمصدر جهد . واتجاه هذا المصدر يجب أن يكون كما هو موضح بالرسم وذلك مع فرض اتجاه موجب للتيار I_2 . وعلى هذا « فإن القطبية اللحظية للجهد التأثيرى التبادلى فى الملف الثانى تكون موجبة عند الطرف الذى يترك عنده التيار الطبيعى الملف » .

قاعدة النقطة للملفات المترابطة :

فى حين أنه يمكن تعين القطبية النسبية للجهود التأثيرية التبادلية برسم قلب الملفات الذى يوضح اتجاه اللف ، فإن هذه الطريقة غير عملية . ولتبسيط الرسم التوضيحى الذى يمثل الدوائر المترابطة ، فإننا نميز رسم الملفات بنقط كما هو موضح فى الشكل ١٣–٥ (ج) . وذلك بوضع نقطة عند الأطراف التى لها نفس القطبية اللحظية على أساس التأثير التبادلى فقط . ولتطبيق نظام النقطة فإننا يجب أن نعرف عند أى طرف من الملف يجب وضع النقطة . وعلاوة على ذلك فإننا يجب أن نعين الإشارة اللازمة للجهد التأثيرى التبادلى عند كتابة معادلات تيار الشبيكة .

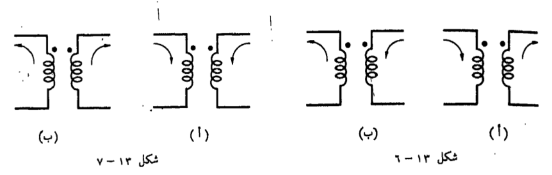
ولوضع النقط على زوج من الملفات المترابطة ، فإننا نختار اتجاه تيار فى ملف من الملفين ونضع نقطة عن الطرف الذى يدخل عنده التيار إلى الملف . ويكون الطرف ذو النقطة موجباً لحظياً بالنسبة إلى الطرف الآخر للملف . نطبق قاعدة اليد اليمنى لإيجاد الفيض المقابل كما هو موضح فى الشكل ١٣– ٥ (أ) . والآن فإنه تبعاً لقانون لينز فإن الفيض فى الملف الثانى يجب أن يعاكس الفيض الأصلى . انظر شكل ١٣ – ٥ (ب) .



شكل ١٣ – ٥

نستخدم قاعدة اليد اليمنى لإيجاد اتجاه التيار الطبيعى ، وحيث أن الجهد التأثيرى التبادلى يكون موجباً عند الطرف الذى يترك عنده التيار الطبيعى الملف ، فإننا نضع نقطة عند هذا الطرف كما هو موضح فى الشكل ١٣ – ٥ (ب) . وباعطاء القطبية اللحظية الملفات بواسطة النقط فإننا لانحتاج إلى رسم قلب الملفات وبذلك يمكن رسم الملفات المترابطة كما فى الشكل ١٣ – ٥ (حـ) .

لتعيين إشارة الجهد التأثيرى التبادلى فى معادلات تيار الشبيكة فإننا نستخدم قاعدة النقطة التى تنص على أن : (١) عندما تدخل أو تخرج التيارات المفروضة إلى زوج من الملفات المترابطة عند الطرف الذى عنده النقطة فإن إشارات الحدود M تكون نفسها إشارات الحدود L ؛ (٢) إذا دخل أحد التيارات من الطرف الذى عنده النقطة بينما خرج الثانى من الطرف الذى عنده النقطة ، فإن إشارات الحدود M تكون معاكسة لإشارات الحدود L .

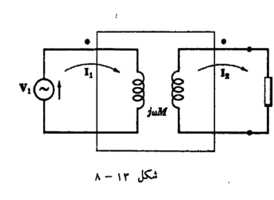


(ب) (أ) (ب) (أ)

شكل ١٣ – ٧ شكل ١٣ – ٦

يوضح الشكل ١٣ – ٦ حالتين فيهما إشارات الحدود M و L متعاكسة . ويوضح الشكل ١٣ – ٧ حالتين فيهما الحدود M و L لها نفس الإشارات .

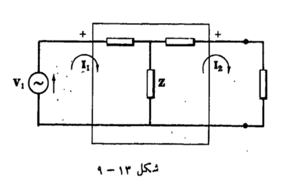
ولزيادة توضيح القطبية النسبية المتعلقة بدائرتين مرتبطتين تبادليا نعتبر الدائرة الموضحة فى الشكل ١٣ – ٨ وفيها تم وضع النقط واختيار التيارات $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ كما هو موضح . وبما أن أحد التيارات يدخل عند الطرف الذى عنده النقطة ، فإن إشارة الحدود M تكون معاكسة لإشارة الحدود L . وتكون معادلات تيار الشبيكة فى الصيغة المصفوفية لهذه الدائرة هى



شكل ١٣ – ٨

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & -j\omega M \\ -j\omega M & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (١٥)$$

نعتبر الآن شبيكتين فرعيتين بسيطتين مترابطتين توصيلياً كما هو موضح فى الشكل ١٣ – ٩ وفيهما تم تعيين الأطراف الموجبة . إن معادلات تيار الشبيكة فى الصيغة المصفوفية هى



شكل ١٣ – ٩

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & -\mathbf{Z} \\ -\mathbf{Z} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (١٦)$$

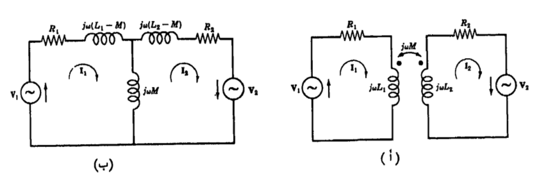
وتظهر المعاوقة المشتركة $\mathbf{Z}$ لتيارى الشبيكة بإشارة سالبة وذلك لأن التيارين $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ يمران فى اتجاهين متعاكسين فى الفرع الذى يحتوى على $\mathbf{Z}$.

وعند تغطية الصناديق الموضحة فى الشكلين ١٣ – ٨ ، ١٣ – ٩ فإن الدائرتين تظهران متطابقتان فيما عدا الترميز النقطى فى إحدى الدائرتين والترميز بالإشارات فى الأخرى . بمقارنة (١٥) و (١٦) فإن الإشارة السالبة للحد $j\omega M$ تقابل الإشارة السالبة للمعاوقة Z .

الدوائر المكافئة المرتبطة توصيليا :

يمكن فى التحليل إبدال الدائرة المترابطة تبادلياً بدائرة مكافئة مترابطة توصيلياً . نعتبر الدائرة الموضحة فى الشكل ١٣ – ١٠ (أ) ونختار اتجاهى التيارين $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ كما هو موضح فى الشكل . فتكون معادلات تيار الشبيكة فى الصيغة المصفوفية هى

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (١٧)$$



شكل ١٣ – ١٠

نفرض اتجاهات التيار فى الشكل ١٣–١٠ (ب) هى نفسها فى الشكل ١٣–١٠ (أ) . والتياران $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ يمران فى الفرع المشترك فى اتجاهين متعاكسين ، والمعاوقة المطلوبة هنا هى $j\omega M$. نجد فى المعادلة (١٧) أن $\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1$. وبما أن تيار الشبيكة $\mathbf{I}_1$ يمر فى الفرع المشترك الذى معاوقته $j\omega M$ فإننا يجب أن ندخل $(-j\omega M)$ فى المسار المغلق ونكتب

$$\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 - j\omega M + j\omega M = R_1 + j\omega L_1$$

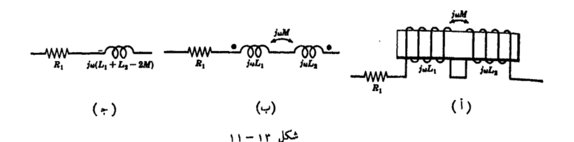
وبالمثل بالنسبة للمسار المغلق الثانى

$$\mathbf{Z}_{22} = R_2 + j\omega L - j\omega M + j\omega M = R_2 + j\omega L_2$$

وإذا كتبنا معادلات تيار الشبيكة للدائرة الموضحة فى الشكل ١٣ – ١٠ (ب) فإننا نحصل على مجموعة المعادلات (١٧) . وعلى ذلك فإن الدائرة المترابطة توصيليا والموضحة فى الشكل ١٣ – ١٠ (ب) تكافىء الدائرة المترابطة تبادلياً والموضحة فى الشكل ١٣ – ١٠ (أ) .

والطريقة السابقة فى التحليل لاتعطينا دائماً دائرة مكافئة يمكن تحقيقها فيزيائياً – وهذا صحيح عندما $M > L_1$ أو $M > L_2$.

لإبدال الملفين المرتبطين تبادلياً والمتصلين على التوالى المبينين فى الشكل ١٣ – ١١ (أ) فإننا نتبع الطريقة التالية . نطبق أولا الطرق السابقة لنحصل على الترميز النقطى الموضح فى الشكل ١٣ – ١١ (ب) نستبدل الآن الترميز النقطى المكافىء بدائرة توصيلية مكافئة كما فى الشكل ١٣ – ١١ (جـ) .



شكل ١٣ – ١١

ولتحليل الدائرة الموضحة فى الشكل ١٣ – ١١ (أ) فإنه يلزمنا اعتبار فيض مغناطيسى لتحديد إشارات الجهود التأثيرية التبادلية . أما فى دائرة الشكل ١٣ – ١١ (ب) فإنه لايلزمنا اعتبار أى فيض ولكن يلزمنا قاعدة النقطة . ويمكن كتابة المعادلات اللازمة لدائرة الشكل ١٣ – ١١ (جـ) بالطريقة المعتادة بصرف النظر عن الفيض أو النقط أو التأثير التبادلى . والدوائر الثلاث لها جميعاً نفس المعاوقة المركبة $\mathbf{Z} = R_1 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$.

مسائل محلولة

١٣ – ١ ملف يتكون من ملفين مترابطين يمر به تيار مستمر مقداره 5 A ، فإذا كان الفيض φ_{11} و φ_{12} المقابلين لها 0.2mWb و 0.4 mWb على الترتيب ، وكان $N_2 = 1500$ و $N_1 = 500$. فأوجد L_1 و L_2 و M و k .

الفيض الكلى هو : $\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} = 6 \times 10^{-4}$ webers . إذن الحث الذاتى للملف الأول هو

$$L_1 = N_1\varphi_1/I_1 = 500(6 \times 10^{-4})/5 = 0{\cdot}06 \text{ H}$$

ومعامل الربط هو : $k = \varphi_{12}/\varphi_1 = 0{\cdot}4/0{\cdot}6 = 0{\cdot}667$

والحث التبادلى هو : $M = N_2\varphi_{12}/I_1 = 1500(4 \times 10^{-4})/5 = 0{\cdot}12 \text{ H}$

وبما أن $M = k\sqrt{L_1L_2}$, $0{\cdot}12 = 0{\cdot}667\sqrt{0{\cdot}06L_2}$ ، فإن $L_2 = 0{\cdot}539$ H

١٣ – ٢ ملفان مترابطان لهما $L_1 = 0.8$ H و $L_2 = 0.2$ H ومعامل الربط لهما $k = 0.9$. أوجد الحث التبادلى M والنسبة بين عدد لفاتهما N_1/N_2 .

الحث التبادلى هو : $M = k\sqrt{L_1L_2} = 0{\cdot}9\sqrt{0{\cdot}8(0{\cdot}2)} = 0{\cdot}36$ H

وباستخدام المعادلة $M = N_2\varphi_{12}/i_1$ ، والتعويض فيها عن φ_{12} بـ $k\varphi_1$ ثم ضربها فى N_1/N_2 نحصل على ،

$$M = k\frac{N_2}{N_1}\left(\frac{N_1\varphi_1}{i_1}\right) = k\frac{N_2}{N_1}L_1 \quad \text{و} \quad N_1/N_2 = kL_1/M = 0{\cdot}9(0{\cdot}8)/0{\cdot}36 = 2$$

١٣ – ٣ ملفان مترابطان حثهما الذاتى على الترتيب هو $L_1 = 0.5$ H و $L_2 = 0.20$ H ومعامل الربط لهما هو $k = 0.5$ ، وعدد لفات الملف الثانى 1000 لفة . فإذا كان التيار المار فى الملف الأول هو $i_1 = 5 \sin 400t$ amperes ، فعين الجهد فى الملف الثانى وكذلك أكبر قيمة للفيض المعطى بالملف الأول .

الحث التبادلي هو : $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0{\cdot}5\sqrt{0{\cdot}05(0{\cdot}20)} = 0{\cdot}05$ H إذن الجهد فى الملف الثانى يعطى بالمعادلة $v_2 = M(di_1/dt) = 0{\cdot}05\frac{d}{dt}(5\sin 400t) = 100\cos 400t$ و بما أن الجهد فى الملف الثانى يعطى أيضاً بالمعادلة $N_2(d\varphi_{12}/dt)$ فإن v_2

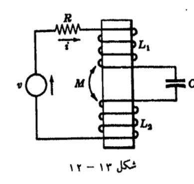
$$100\cos 400t = 1000(d\varphi_{12}/dt)$$

و

$$\varphi_{12} = 10^{-3}\int 100\cos 400t\,dt = 0{\cdot}25 \times 10^{-3}\sin 400t \text{ Wb}$$

وأكبر قيمة للفيض φ_{12} هى 0.25 m Wb . إذن أكبر قيمة للفيض φ_1 هى :

$$\varphi_{1\,max} = \frac{\varphi_{12\,max}}{0{\cdot}5} = \frac{0{\cdot}25 \times 10^{-3}}{0{\cdot}5} = 0{\cdot}5 \text{ mWb}$$



شكل ١٣ – ١٢

١٣ – ٤ طبق قانون كيرشوف للجهد على الدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣ – ١٢ ثم اكتب المعادلة فى الصيغة اللحظية .

بملاحظة اتجاه لف الملفات يتضح أن إشارات حدود M تعاكس إشارات حدود L . ويلاحظ أيضاً أن الجهد التأثيرى التبادلى يظهر فى كل ملف نتيجة التيار i المار فى الملف الآخر .

$$Ri + L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i\,dt + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} = v$$

أو

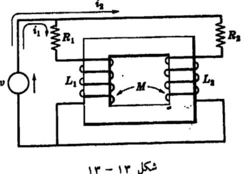
$$Ri + (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i\,dt = v$$

١٣ – ٥ اكتب معادلات تيار الشبيكة فى الصيغة اللحظية للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣ – ١٣ .

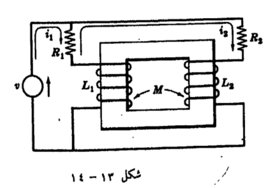
نختار تيارى الشبيكة i_1 و i_2 كما هو موضح بالرسم ونطبق قاعدة اليد اليمنى على كل ملف . حيث أن الفيضين يساعد كل منهما الآخر فإن إشارة حدود M هى نفسها إشارة حدود L . إذن

$$R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = v$$



شكل ١٣ – ١٣



شكل ١٣ – ١٤

١٣ – ٩ كرر المسألة ١٣ – ٥ مع أخذ تيار الشبيكة i_2 كما هو موضح فى الشكل ١٣ – ١٤ .

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على المسار المغلق للتيار i_2 فإن الجهود التأثيرية التبادلية تكون موجبة . إذن

$$R_1(i_1 - i_2) + L_1\frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + M\frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{d}{dt}(i_2 - i_1) + L_1\frac{d}{dt}(i_2 - i_1) - M\frac{di_2}{dt} = 0$$

١٣ – ٧ ملفان متصلان على التوالى لهما حث مكافىء L_A عندما كان التوصيل يقوى كل منهما الآخر وحث مكافىء L_B عندما كان التوصيل يعاكس كل منهما الآخر . أوجد الحث التبادلى M بدلالة L_A و L_B .

عندما كان التوصيل يقوى كل منهما الآخر فإن الحث المكافىء يعطى بالمعادلة

$$L_A = L_1 + L_2 + 2M \qquad (١)$$

وعندما كان التوصيل يعاكس كل منهما الآخر فأننا نحصل على

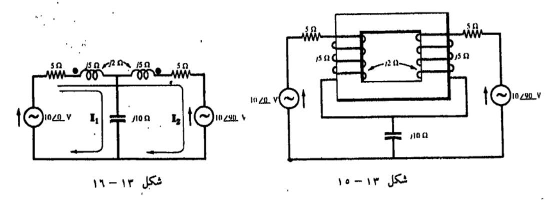
$$L_B = L_1 + L_2 - 2M \qquad (٢)$$

بطرح (٢) من (١) نجد أن

$$L_A - L_B = 4M \qquad \text{و} \qquad M = \tfrac{1}{4}(L_A - L_B)$$

يشير هذا الحل إلى طريقة عملية لتعين M وذلك بتوصيل الملفين بالطريقتين السابقتين وتعين الحث المكافىء لهما عن طريق قنطرة تيار متردد . ويكون الحث الناتج هو ربع الفرق بين الحثين المكافئين .

١٣ – ٨ أوجـد الدائرة المكافئة بالترميز النقطى للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣ – ١٥ . أوجـد الجهد على المائعة $-j\,10\ \Omega$ وذلك باستخدام الدائرة المكافئة .



شكل ١٣ – ١٦   شكل ١٣ – ١٥

لوضع النقط على الدائرة نعتبر فقط الملفين واتجاه لفهما . يتحرك التيار فى أعلى الملف الذى على اليسار وعلى ذلك فإننا نضع نقطة عند هذا الطرف . ويكون اتجاه الفيض المقابل لهذا التيار فى الجهة اليسرى من القلب إلى أسفل . من قانون لينز نجد أن اتجاه الفيض فى الملف الذى على اليمين يجب أن يكون إلى أعلى . وتعطى قاعدة اليد اليمنى اتجاه التيار الطبيعى . وهذا التيار يترك الملف عند الطرف العلوى الذى يجب فى هذه الحالة ترميزه بنقطة كما هو موضح فى الشكل ١٣ – ١٦ .

وبالاختيار الموضح للتيارين i_1 و i_2 فإن معادلات تيار الشبيكة فى الصيغة المصفوفية تكون

$$\begin{bmatrix} 5-j5 & 5+j3 \\ 5+j3 & 10+j6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10-j10 \end{bmatrix}$$

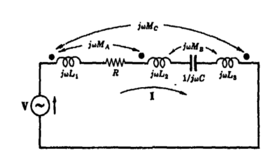
ومنها نجد أن

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5+j3 \\ 10-j10 & 10+j6 \end{vmatrix}}{\Delta_z} \quad 1{\cdot}015\angle 113{\cdot}95\ \text{A}$$

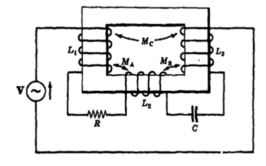
ويكون الجهد على الممانعة $-j\,10\ \Omega$ هو

$$V = I_1(-j10) = 10{\cdot}15\angle 23{\cdot}95^\circ\ \text{V}$$

١٣ – ٩ أوجد الدائرة المكافئة فى الترميز النقطى للملفات المترابطة والموضحة فى الشكل ١٣ – ١٧ ثم اكتب المعادلات المناظرة.



شكل ١٣ – ١٨

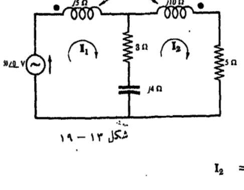


شكل ١٣ – ١٧

نضع النقط باستخدام طرق المسألة ١٣ – ٨ فنحصل على الدائرة الموضحة فى الشكل ١٣ – ١٨ . وبتطبيق قانون كيرشوف للجهد على المسار المغلق الوحيد نجد أن

$$\left[R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega(L_1 + L_2 + L_3 + 2M_A - 2M_B - 2M_C)\right] I = V$$

١٣ – ١٠ فى الشبكة الكهربائية المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣–١٩ أوجد الجهد على المقاومة $5\ \Omega$ وذلك بالنقط المعطاة فى الرسم . ثم اعكس قطبيه ملف واحد وكرر المسألة .



شكل ١٣ – ١٩

نحسب الحث التبادلى من العلاقة

$$jX_m = jk\sqrt{X_{L1}\,X_{L2}} = j0{\cdot}8\sqrt{5(10)} \quad j5{\cdot}66\,\Omega$$

ثم نوجد تيار الشبيكة I_2 .

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j1 & 50 \\ -3-j1{\cdot}66 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+j1 & -3-j1{\cdot}66 \\ -3-j1{\cdot}66 & 8+j6 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{171\angle 29}{19{\cdot}9\angle 53{\cdot}8} \quad 8{\cdot}60\angle\ 24{\cdot}8\ \text{A}$$

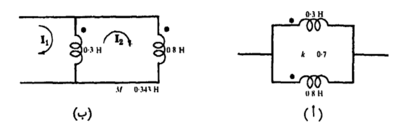
ويكون الجهد عبر المقاومة $5\ \Omega$ هو $V_5 = I_2(5) = 43\angle -24.8^\circ\ V$

بتغيير قطبيه ملف واحد تتغير مصفوفه المعاوقة وينتج لدينا قيمة جديدة لتيار الشبيكة I_2 .

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j1 & 50 \\ -3+j9.66 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+j1 & -3+j9.66 \\ -3+j9.66 & 8+j6 \end{vmatrix}} = \frac{505\angle -72.7^\circ}{132\angle 39.4^\circ} = 3.83\angle -112.1^\circ\ A$$

والجهد على المقاومة $5\ \Omega$ هو $V_5 = I_2(5) = 19.15\angle -112.1^\circ\ V$

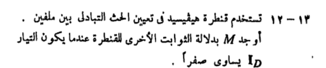
١٣ – ١١ أوجد الحث المكافىء للملفين L_1 و L_2 المتصلين على التوازى والموضحين فى الشكل ١٣ – ٢٠ (أ)



شكل ١٣ – ٢٠

الحث التبادلى هو $M = k\sqrt{L_1L_2} = 0.7\sqrt{0.3(0.8)} = 0.343\ H$. بوضع الدائرة كما فى الشكل ١٣–٢٠ (ب) وادخال تيارات الشبيكة نجد أن

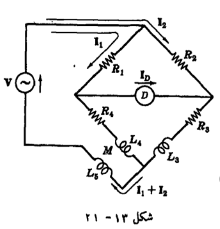
$$[Z] = \begin{bmatrix} j\omega 0.3 & j\omega 0.043 \\ j\omega 0.043 & j\omega 0.414 \end{bmatrix}$$



$$Z_{input\,1} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{11}} = \frac{j\omega 0.3(j\omega 0.414) - (j\omega 0.043)^2}{j\omega 0.414} = j\omega 0.296\ \Omega$$

والحث المكافىء للملفين المترابطين هو $0.296\ H$.

١٣ – ١٢ تستخدم قنطرة هيفيسيد فى تعيين الحث التبادلى بين ملفين . أوجد M بدلالة الثوابت الأخرى للقنطرة عندما يكون التيار I_D يساوى صفراً .



شكل ١٣ – ٢١

نختار تيارى الشبيكة I_1 و I_2 كما هو موضح فى الرسم . إذا كان $I_D = 0$ فإن الجهد على المقاومتين R_1 و R_2 لابد أن يكون متساوياً :

$$I_1R_1 = I_2R_2 \qquad (1)$$

وبالمثل فإن الجهد على كل من $(R_4 + j\omega L_4)$ و $(R_3 + j\omega L_3)$ يكون أيضاً متساوياً . وعلى ذلك فإنه يظهر جهد تأثيرى تبادلى عند L_4 ويكون التيار فى الملف الآخر L_5 مساوياً للمجموع $I_1 + I_2$.

$$\mathbf{I}_1(R_4 + j\omega L_4) + j\omega M(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = \mathbf{I}_2(R_3 + j\omega L_3) \quad (٢)$$

بالتعويض فى (٢) بالمعادلة $\mathbf{I}_2 = (R_1/R_2)\mathbf{I}_1$ نجد أن

$$\mathbf{I}_1(R_4 + j\omega L_4 + j\omega M) + (R_1/R_2)\mathbf{I}_1(j\omega M) = (R_1/R_2)\mathbf{I}_1(R_3 + j\omega L_3) \quad (٣)$$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية فى المعادلة (٣) نجد أن

$$R_4R_2 = R_1R_3 \quad \text{و} \quad j\omega\left(L_4 + M + \frac{R_1}{R_2}M\right) = j\omega\frac{R_1}{R_2}L_3 \quad \text{ومنها نجد أن} \quad M = \frac{R_1L_3 - R_2L_4}{R_1 + R_2}$$

١٣ - ١٣ أبدل الشبكة الكهربائية المترابطة والموضحة فى الشكل ١٣ - ٢٢ بدائرة ثفنين المكافئة بين الطرفين AB .

جهد ثفنين المكافىء $\mathbf{V}'$ هو جهد الدائرة المفتوحة بين الطرفين AB . باختيار تيارى الشبكة $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ كما هو موضح فى الشكل والحصول على $\mathbf{I}_2$ نجد أن

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 10 \\ -2 + j3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -2 + j3 \\ -2 + j3 & 6 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{20 - j30}{10 + j67} = 0.533\angle -137.8^\circ \text{ A}$$

والآن $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_2(4) = 2.13\angle -137.8^\circ$ V

شكل ١٣ - ٢٢

ولتعيين معاوقة ثفنين المكافئة $\mathbf{Z}'$ اعتبر تيار الشبكة الثالث $\mathbf{I}_3$ ثم احسب المعاوق $\mathbf{Z}_{\text{input 3}}$ بين الطرفين AB وذلك مع وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر .

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}_{\text{input 3}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{33}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -2 + j3 & 0 \\ -2 + j3 & 6 + j5 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -2 + j3 \\ -2 + j3 & 6 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{j456}{10 - j67} = 6.74\angle 8.5^\circ\ \Omega$$

شكل ١٣ - ٢٣

والشكل ١٣ - ٢٣ يوضح دائرة ثفنين المكافئة .

١٣ - ١٤ فى دائرة المسارين المغلقين المرتبطتين والموضحة فى الشكل ١٣ - ٢٤ ، بين أن الترميز النقطى ليس ضروريا طالما أن المسار المغلق الثانى مسار خامل .

نختار تيارات الشبكة كما هو موضح فى الشكل ثم نحل للحصول على $\mathbf{I}_2$.

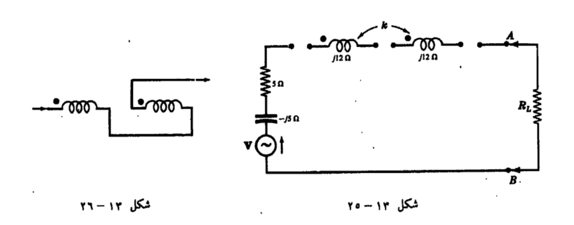
شكل ١٣ - ٢٤

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2+j5 & 50 \\ \pm j4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j5 & \pm j4 \\ \pm j4 & 5+j10 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-50(\pm j4)}{-24+j45} = 3{\cdot}92\underline{/61{\cdot}9^\circ \pm 90^\circ}\text{ A}$$

لاتتأثر قيمة Δ_Z بإشارة M ، وعلى ذلك فالتيار $\mathbf{I}_2$ له زاوية طور اما 151.9° أو -28.1° . حيث أنه لايوجد مصدر للجهد فى المسار المغلق فإنه ليس ضرورياً معرفة قطبيه الجهد التأثيرى التبادلى . والهبوط فى الجهد على معاوقات المسار المغلق يجب أن يكون متساوياً فى المقدار ومختلفاً بزاوية طور مقدارها 180° ، ولاتتأثر القدرة فى المعاوقة ، ومن الثابت أيضاً أن $\mathbf{I}_1$ متطابق لكلتا إشارتى التأثير التبادلى .

١٣ – ١٥ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٣ – ٢٥ ، أوجد R_L التى ينتج عندها أكبر قدرة وذلك بعد الاختيار المناسب لتوصيل الملفين وأوجد k .



شكل ١٣ – ٢٥

شكل ١٣ – ٢٦

إن معاوقة الدائرة على يسار AB يجب أن تكون أقل مايمكن . وبالتعبير عن معاوقة هذا الجزء فى الدائرة نحصل على

$$Z = 5 - j5 + j12 + j12 \pm j2X_M = 5 + j19 \pm j2\sqrt{12(12)}\,\Omega$$

ولكى تكون قيمة المعاوقة أقل مايمكن فإن الممانعة يجب أن تكون مساوية للصـــفر . وعلى ذلك فإن الإشارة الصحيحة للحث التبادلى سالبة .

$$19 - 2k\sqrt{12(12)} = 0 \quad \text{و} \quad k = 19/24 = 0{\cdot}792$$

والتوصيل الموضح فى الشكل ١٣ – ٢٦ ينتج عنه إشارة سالبة للجهد التأثيرى التبادلى كما هو المطلوب .
إذن معاوقة الدائرة على يسار الطرفين AB هى مقاومة نقية قيمتها $5\ \Omega$ ، وينتج لدينا أكبر قدرة عندما

$$R_L = R_g = 5 \text{ ohms}$$

١٣ – ١٦ الدائرة الموضحة فى الشكل ١٣ – ٢٥ لها مقاومة حمل $R_L = 10\ \Omega$ ومصدر $\mathbf{V} = 50\underline{/0°}\ \text{V}$. مع اعتبار احتمال توصيل الملفين وأن k تتغير من $1 \rightarrow 0$ أوجد مدى تغير القدرة المعطاة لمقاومة الحمل .

باعتبار التوصيل الموضح فى الشكل ١٣ – ٢٦ فأن الحث التبادلى يكون سالباً وتكون معاوقة الدائرة الكلية بما فيها الحمل هى $\mathbf{Z}_T = 5 - j5 + j12 + j12 - j24k + 10\ \Omega$. وبوضع $k = 1$ ، إذن

$$\mathbf{Z}_T = 15 - j5 = 15{\cdot}8\underline{/-18{\cdot}45°}\ \Omega,\ \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{50\underline{/0°}}{15{\cdot}8\underline{/-18{\cdot}45°}} = 3{\cdot}16\underline{/18{\cdot}45°}\ \text{A}$$

والقدرة فى المقاومة $10\ \Omega$ هى $P = I^2R = (3{\cdot}16)^2(10) = 100\ \text{W}$

والآن بوضع $k = 0$ ، إذن

$$\mathbf{Z}_T = 15 + j19 = 24{\cdot}2\underline{/51{\cdot}7°}\ \Omega,\ \mathbf{I} = 50\underline{/0°}/(24{\cdot}2\underline{/51{\cdot}7°}) = 2{\cdot}06\underline{/-51{\cdot}7°}\ \text{A}$$

والقدرة فى المقاومة $10\ \Omega$ هى $(2{\cdot}06)^2(10) = 42{\cdot}4$ watts وعندما $k = 0.792$ فإن $P_{\max} = 111\text{W}$.

بتغيير توصيل الملفين ينتج لدينا إشارة موجبة للحث التبادلى . إذن المعاوقة تصبح $\mathbf{Z}_T = 15 + j19 + jk24\ \Omega$ بوضع $K = 1$ ، إذن

$$\mathbf{Z}_T = 15 + j43 = 45{\cdot}6\underline{/70{\cdot}8°}\ \Omega,\ \mathbf{I} = 50\underline{/0°}/(45{\cdot}6\underline{/70{\cdot}8°}) = 1{\cdot}095\underline{/-70{\cdot}8°}\ \text{A}$$

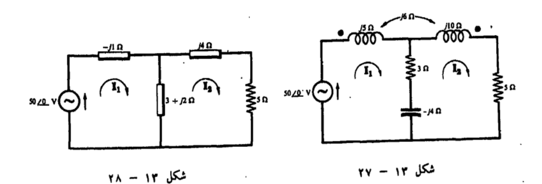
والقدرة المناظرة هى $P = I^2R = (1{\cdot}095)^2(10) = 12\ \text{W}$.

وعلى ذلك فإنه من المتوقع أن تكون القدرة فى المقاومة $10\ \Omega$ فى المدى من $12\ \text{W}$ إلى $100\ \text{W}$.

١٣ – ١٧ أوجد الدائرة المكافئة المرتبطة توصيليا للدائرة المرتبطة تبادليا والموضحة بالشكل ١٣–٢٧

نختار تيارى الشبيكة $\mathbf{I}_1$ و $\mathbf{I}_2$ كما هو موضح ثم نكتب المعادلة فى الصيغة المصفوفية .

$$\begin{bmatrix} 8 + j1 & -8 - j2 \\ -8 - j2 & 8 + j6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\underline{/0°} \\ 0 \end{bmatrix}$$

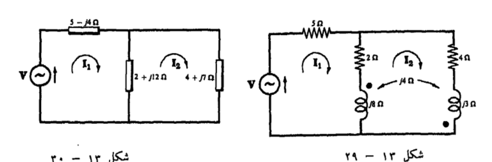


شكل ١٣ – ٢٧

شكل ١٣ – ٢٨

. نختار تيارات للشبيكة فى الدائرة المرتبطة توصيليا بنفس الاتجاه فى الدائرة المرتبطة تبادليا. من مصفوفة المعاوقة نجد أن $Z_{12} = -3 - j2\,\Omega$. وحيث أن التيارين المارين فى الفرع المشترك فى اتجاهين متعاكسين فإن معاوقة الفرع المطلوبة هى $3 + j\,2\,\Omega$. والآن فإن المعاوقة الذاتية للمسار الأول هى $Z_{11} = 3 + j1\,\Omega$. . وعلى ذلك فإننا نحتاج إلى معاوقة $-j1\Omega$ فى هذا المسار المغلق . وبالمثل بما أن $Z_{22} = 8 + j6\,\Omega$ فإن المسار المغلق يحتاج إلى المعاوقة $5 + j4\,\Omega$ وذلك بالإضافة إلى عناصر الفرع المشترك كما هو موضح فى الشكل ١٣–٢٨ .

١٣ – ١٨ أوجد الدائرة المكافئة المرتبطة توصيليا للشبكة الكهربائية المرتبطة تبادليا والموضحة فى الشكل ١٣–٢٩ .



شكل ١٣ – ٣٠ شكل ١٣ – ٢٩

نختار تيارى الشبيكة I_1 و I_2 ونكتب معادلات تيار الشبيكة فى الصيغة المصفوفية .

$$\begin{bmatrix} 7 + j8 & -2 - j12 \\ -2 - j12 & 6 + j19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$

فى الدائرة المرتبطة توصيليا يمر تيارى الشبيكة فى الفرع المشترك فى اتجاهين متعاكسين وحيث أن Z_{12} فى مصفوفة المعاوقة هى $-2 - j\,12\,\Omega$ ، فإن معاوقة هذا الفرع يجب أن تكون $2 + j\,12\,\Omega$. وبالمثل نجد من مصفوفة المعاوقة أن $Z_{11} = 7 + j\,8\Omega$ و $Z_{22} = 6 + j\,19\,\Omega$ وعلى ذلك فإن المعاوقات الباقية فى المسارين المغلقين 1 و 2 فى الدائرة المكافئة هى على الترتيب .

$$Z_2 = (6 + j19) - (2 + j12) = 4 + j7\,\Omega \quad , \quad Z_1 = (7 + j8) - (2 + j12) = 5 - j4\,\Omega$$

والشكل ١٣–٣٠ يوضح الدائرة المكافئة المرتبطة توصيليا .

مسائل اضافية

١٣ – ١٩ ملفان معامل الربط لهما $k = 0.85$ وعدد لفات الملف الأول 250 لفه . وعندما كان التيار فى الملف الأول $i_1 = 2\text{ A}$ كان الفيض الكلى φ_1 يساوى 0.3 mWb. وعند انقاص التيار i_1 خطيا إلى الصفر فى 2m sec كان الجهد التأثيرى فى الملف الثانى يساوى 63.75 V ، أوجد L_1 و L_2 و M و N_2 الجواب 37.5 mH, 150 mH, 63.8 mH, 500

١٣ – ٢٠ ملفان مترابطان عدد لفاتهما $N_1 = 100$ و $N_2 = 800$ ومعامل الربط لهما هو 0.85 ، وعندما كان الملف الأول مفتوحا ومر تيار قيمته 5A فى الملف الثانى كان الفيض φ_2 يساوى 0.35mWb ، أوجد L_1 و L_2 و M

الجواب : 0.875 mH, 56 mH, 5.95 mH

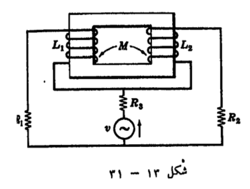
١٣–٢١ إذا كان الحث المكافئ لملفين متماثلين فى حالة توصيلهما على التوالى بحيث يساعد كل منهما الآخر هو 0.080 H ، وفى حالة توصيلهما على التوالى بحيث يعاكس كل منهما الآخر هو 0.035H ، أوجد قيم L_1 و L_2 و M و K .
الجواب : $L_1 = 28{\cdot}8$ mH, $L_2 = 28{\cdot}8$ mH, $M = 11{\cdot}25$ mH, 0·392

١٣–٢٢ ملفان مترابطان لهما $L_1 = 0.02$ H و $L_2 = 0.01$ H و $k = 0.5$. وصلا بأربع طرق مختلفة ؛ على التوالى ويساعد كل منهما الآخر ؛ على التوالى ويعاكس كل منهما الآخر ؛ على التوازى بالترتيبين المحتملين لاتجاه الملف . أوجد القيم الأربع للحث المكافئ . الجواب : 15·9 mH, 44·1 mH, 9·47 mH, 3·39 mH

١٣–٢٣ ملفان متماثلان لهما $L = 0.02$ H ومعامل الربط لهما $k = 0.8$. أوجد M وقيمتى الحث المكافئ عند توصيل الملفين على التوالى ويساعد كل منهما الآخر أو على التوالى ويعاكس كل منهما الآخر . الجواب : 16 mH, 72 mH, 8 mH

١٣–٢٤ ملفان حثهما كنسبة 4 إلى 1 ومعامل الربط لهما $k = 0.6$. وعند توصيل هذين الملفين على التوالى بحيث يساعد كل منهما الآخر كان الحث المكافئ لهما هو 44.4 mH أوجد L_1 و L_2 و M الجواب : 6 mH, 24 mH, 7·2 mH

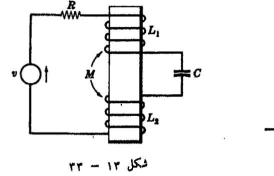
١٣–٢٥ ملفان حثهما $L_1 = 6.8$ mH و $L_2 = 4.5$ mH وصلا على التوالى بحيث يساعد كل منهما الآخر ثم وصلا على التوالى بحيث يعاكس كل منهما الآخر . فإذا كان الحث المكافئ فى الحالتين هو 19.6mH و 3mH على الترتيب أوجد M و k . الجواب : 4·15 mH, 0·75



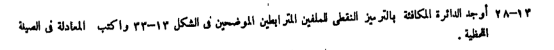
شكل ١٣ – ٣١

١٣–٢٦ اختر تيارات الشبيكة للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣–٣١ ثم اكتب المعادلات فى الصيغة المحلية . أوجد الدائرة المكافئة فى الترميز النقطى ثم اكتب معادلتها وقارن بين النتيجتين .

١٣–٢٧ ارسم الدائرة المكافئة بالترميز النقطى للملفات المترابطة والموضحة فى الشكل ١٣–٣٢ . ثم أوجد الممانعة الحثية المكافئة لها . الجواب : $j12\,\Omega$



شكل ١٣ – ٣٣

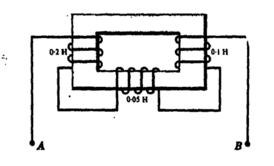


شكل ١٣ – ٣٢

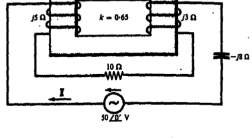
١٣–٢٨ أوجد الدائرة المكافئة بالترميز النقطى للملفين المترابطين الموضحين فى الشكل ١٣–٣٣ واكتب المعادلة فى الصيغة المحلية .

١٣-٢٩ ارسم الدائرة المكافئة بالترميز النقطي للملفين المترابطين الموضحين فى الشكل ١٣-٣٤ ثم أوجد التيار I .

الجواب : $4.47\angle 26.7° A$



شكل ١٣ - ٣٥



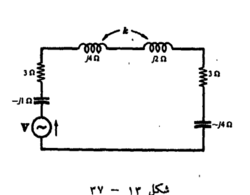
شكل ١٣ - ٣٤

١٣-٣٠ أوجد الدائرة المكافئة بالترميز النقطى للملفات الثلاثة الموضحة فى الشكل ١٣-٣٥ ، ثم أوجد الحث المكافىء لهما عند الطرفين AB . اعتبر جميع معاملات الربط تساوى 0.5 . الجواب : 0.239 H

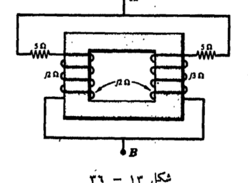
١٣-٣١ أوجد الدائرة المكافئة بالترميز النقطى للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣-٣٦ ، ثم أوجد المعاوقة المكافئة بين الطرفين AB . الجواب : $2.54 + j2.26\ \Omega$

١٣-٣٢ فى الدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣-٣٦ أوجد المعاوقة المكافئة بعد عكس اتجاه لف ملف واحد .

الجواب : $2.53 + j0.238\ \Omega$



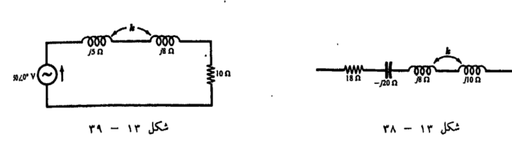
شكل ١٣ - ٣٧



شكل ١٣ - ٣٦

١٣-٣٣ أوجد قيمة k للدائرة المتصلة على التوالى والموضحة فى الشكل ١٣-٣٧ ، ثم ضع النقط على الملفين المترابطين بحيث تكون الدائرة فى حالة رنين على التوالى . الجواب : $k = 0.177$

١٣-٣٤ أوجد قيمة k لدائرة التوالى الموضحة فى الشكل ١٣-٣٨ ، ثم ضع النقط بحيث تكون الدائرة فى حالة رنين على التوالى . الجواب : $k = 0.112$



شكل ١٣ – ٣٩

شكل ١٣ – ٣٨

١٣–٣٥ أوجد قيمة k للدائرة الموضحة فى الشكل ١٣–٣٩ . ثم ضع النقط بحيث تكون القدرة الخارجة من المصدر $50\angle 0^\circ$ V هى 168 W الجواب : $k = 0.475$

١٣–٣٦ فى المسألة ١٣–٣٥ أوجد القدرة الخارجة من المصدر وذلك عند عكس النقط . استخدم قيمة k الموجودة فى المسألة ١٣–٣٥ . الجواب : 54.2 W

١٣–٣٧ أوجد نسبة الجهد V_2/V_1 للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣ – ٤٠ بحيث يكون التيار الناتج I_1 يساوى صفرا . كرر نفس الشئ بحيث يكون التيار I_2 يساوى صفرا .

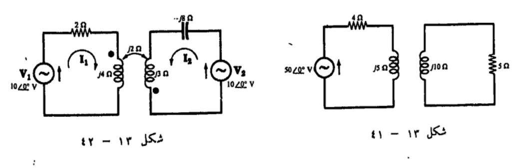
الجواب $1.414\angle -45^\circ,\ 0.212\angle 32^\circ$

شكل ١٣ – ٤٠

١٣–٣٨ فى المسألة ١٣–٣٧ أوجد الجهد الذى يظهر على الممانعة $j8\,\Omega$ عندما $V_1 = 100\angle 0^\circ$ V و $I_1 = 0$

الجواب : $100\angle 0^\circ$ V (+ عند النقطة)

١٣–٣٩ فى الدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣–٤١ أوجد الممانعة الحثية التبادلية $j\omega M$ إذا كانت القدرة فى المقاومة $5\,\Omega$ هى 45.2 W . الجواب : $j4\,\Omega$



شكل ١٣ – ٤٢

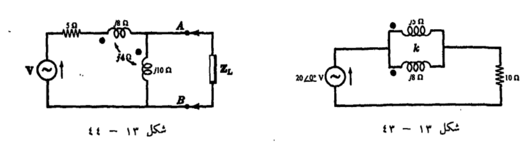
شكل ١٣ – ٤١

١٣–٤٠ فى الدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣–٤٢ أوجد مركبتى التيار I_2 الناتجتين عن المصدرين V_1 و V_2

الجواب : $0.77\angle 112.6^\circ$ A, $1.72\angle 86^\circ$ A

١٣–٤١ عين قيمة k للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣–٤٣ علما بأن القدرة فى المقاومة $10\,\Omega$ هى 32 W .

الجواب : 0.791



شكل ١٣ — ٤٤ شكل ١٣ — ٤٣

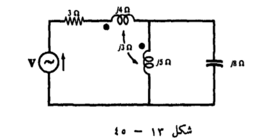
١٣-٤٢ للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣ — ٤٤ ، أوجد معاوقة الحمل Z_L التى ينتج عندها انتقال أكبر قدرة عنـد الطرفين AB . الجواب : $1.4 - j2.74\ \Omega$

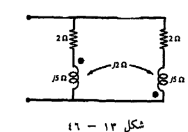
١٣-٤٣ للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣-٤٥ ، أوجد المعاوقة الداخلة عند طرفى المصدر .

الجواب : $3 + j\,36.3\ \Omega$

١٣-٤٤ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٣-٤٥ ، أوجد الجهد على الممانعة $j5\ \Omega$ علما بأن $V = 50\underline{/45°}\ V$.

الجواب : $25.2\underline{/49.74°}\ V$





شكل ١٣ — ٤٦ شكل ١٣ — ٤٥

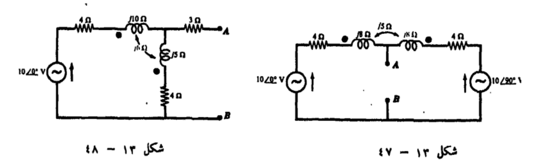
١٣-٤٥ أوجد المعاوقة المكافئة للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣-٤٦ . الجواب : $1 + j1.5\Omega$

١٣-٤٦ أوجد دائرة ثفنين المكافئة للدائرة المترابطة المعطاة فى الشكل ١٣-٤٧ وذلك عند الطرفين AB .

الجواب : $Z' = 2 + j6{\cdot}5\ \Omega,\ V' = 5 + j5\ V$

١٣-٤٧ أوجد دائرة نورتن المكافئة للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣-٤٧ وذلك عند الطرفين AB

الجواب : $Z' = 2 + j6{\cdot}5\ \Omega,\ I' = 1{\cdot}04\underline{/-27{\cdot}9°}\ A$.



شكل ١٣ — ٤٨ شكل ١٣ — ٤٧

١٣–٤٨ أوجد دائرة ثفنين المكافئة للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣–٤٨ وذلك عند الطرفين AB .

الجواب

$$Z' = 8{\cdot}63\,\underline{/48{\cdot}75^\circ}\ \Omega,\ V' = 4{\cdot}84\,\underline{/-34{\cdot}7^\circ}\ V$$

١٣–٤٩ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣–٤٨ .

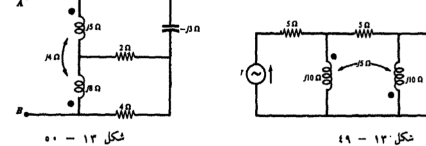
الجواب

$$Z' = 8{\cdot}63\,\underline{/48{\cdot}75^\circ}\ \Omega,\ I' = 0{\cdot}560\,\underline{/-83{\cdot}4^\circ}\ A$$

١٣–٥٠ للدائرة المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣–٤٩ أوجد المعاوقة الداخلة عند طرفى مصدر الجهد **V**

الجواب :

$6{\cdot}22 + j4{\cdot}65\ \Omega$.



شكل ١٣ — ٥٠

شكل ١٣ — ٤٩

١٣–٥١ أوجد المعاوقة المكافئة عند الطرفين AB للشبكة الكهربائية المترابطة الموضحة فى الشكل ١٣ –٥٠

الجواب :

$7{\cdot}06 + j3{\cdot}22\ \Omega$.

الفصل الرابع عشر

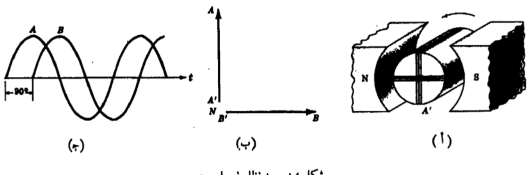
الانظمة المتعددة الاطوار

مقدمة :

يتكون النظام المتعدد الأطوار الذى يمد الأحمال المتصلة فى الأفرع بالقدرة من جهدين متساويين أو أكثر بينها زوايا طور ثابتة . وفى النظام ذى الطورين لدينا جهدان متساويان يختلفان فى الطور بزاوية $90°$ ، بينما فى النظام ذى الأطوار الثلاثة تبلغ زاوية فرق الطور $120°$. وفى التقويم المتعدد الأطوار تستخدم نظم من ستة أطوار أو أكثر وذلك للحصول على جهد مقوم قليل التموج ، والنظام الشائع الاستخدام فى توليد وإرسال القدرة الكهربية هو النظام ذو الأطوار الثلاثة .

النظام ذو الطورين :

ينتج عن دوران زوج الملفات المتعامدة المبينة فى الشكل ١٤ — ١ (أ) فى مجال مغناطيسى ثابت ، جهدان تأثيريان زاوية فرق الطور بينهما ثابتة وتساوى $90°$. وإذا كان عدد اللفات فى الملفين متساو فإن الجهد المطاور والجهد اللحظى يكون لهما نفس المقدار كما هو موضح فى رسمها شكل ١٤ — ١ (ب) و (حـ) على الترتيب .



شكل ١٤ — ١ نظام ذو طورين

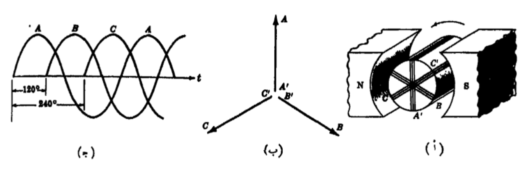
والشكل البيانى للجهد المطاور شكل ١٤ — ١ (ب) له $\mathbf{V}_{BN} = V_{coil}\,\underline{/0°}$ كمحور إسناد وجهد $\mathbf{V}_{AN} = V_{coil}\,\underline{/90°}$

وإذا وصل طرفا A' و B' كفرع N ، فإن النظام ذا الطورين يتكون من الأفرع الثلاثة A و B و N . الفرق فى الجهد بين الفرعين A و B يزيد عن جهد الفرع المتعادل بمقدار $\sqrt{2}$ ويعطى بالمجموع .

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NB} = V_{coil}\,\underline{/90°} + V_{coil}\,\underline{/180°} = \sqrt{2}\,V_{coil}\,\underline{/135°}$$

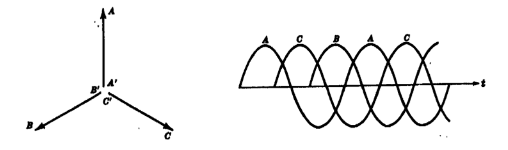
نظام الأطوار الثلاثة :

الجهود التأثيرية الناتجة فى الملفات الثلاثة المتساوية البعد عن بعضهما والمبينة فى الشكل ١٤ - ٢ (أ) لها فرق طور مقداره 120°، ويصل الجهد فى الملف A إلى نهايته العظمى أولا ، ثم يتبعه جهد الملف B ثم C وذلك على حسب التتابع ABC وتتضح هذه المتتابعة من الشكل المطاور وذلك مع اعتبار الاتجاه الموجب للدوران فى عكس حركة عقارب الساعة ، وعلى ذلك فإن الجهد المطاور يمر بنقط ثابتة هى على الترتيب من اليسار A-B-C-A-B-C ، كما يتضح أيضاً من رسم الجهد اللحظى الموضح فى الشكل ١٤ - ٢ (جـ) حيث يصل الجهد للقمة بنفس الترتيب .



شكل ١٤ - ٢ نظام الأطوار الثلاثة

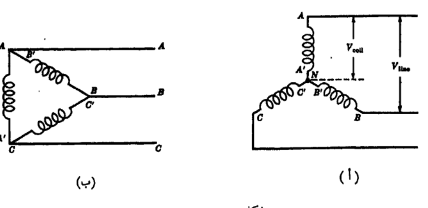
ينتج عن دوران الملفات فى الإتجاه المعاكس المتتابعة CBA المبينة فى الشكل ١٤ - ٣ .



شكل ١٤ - ٣ المتتابعة CBA

وبالرغم من أن نظرية عمل الآلة الموضحة فى الشكل ١٤ - ٢ (أ) معروفة جيداً إلا أنه توجد عدة عوامل عملية تمنع استخدامها . والأجهزة العملية المستخدمة حالياً يدور فيها المجال بينما تبقى الملفات الثلاثة الطورية ثابتة .

بتوصيل نهايات الملفات A' و B' و C' فى الشكل ١٤ - ٢ (أ) تنتج جهود متصلة على شكل نجمة بينما بتوصيل A و B' ؛ B و C' ؛ C و A' فى الشكل ١٤ - ٤ (ب) تنتج عنه جهود مترددة متصلة على شكل دلتا .



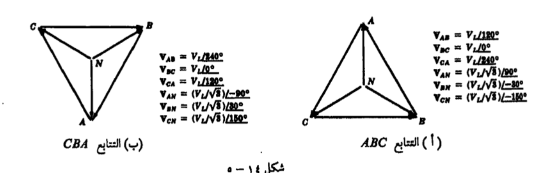
شكل ١٤ – ٤

فى توصيلات النجمة يتساوى تيارات الملفات و الأفرع و الجهد بين فرعين يساوى ($\sqrt{3}$ جهد الملف). أما فى توصيلات دلتا فإنه يتساوى جهد الملفات والأفرع ولكن تيارات الملفات تساوى ($1/\sqrt{3}$ تيار الفرع) أنظر المسألة ١٤ – ٢ .

وفى كلا الاتصالين فإن الأفرع A و B و C تمثل نظام جهد ذى ثلاثة أطوار . ونقطة التعادل فى توصيلات النجمة هى نقطة التوصيل الرابعة للأطوار الثلاثة (نظام أربعة أسلاك) .

جهود نظام الأطوار الثلاثة :

باختيار أحد الجهود كجهد اسناد بزاوية طور تساوى صفر يمكننا تعيين زوايا الطور للجهود الأخرى فى هذا النظام . سنأخذ فى هذا الفصل V_{BC} كجهد اسناد ويبين المثلثان فى الشكلين ١٤ – ٥ (أ) ، (ب) جميع الجهود فى التتابعين ABC و CBA على الترتيب .



(ب) التتابع CBA (أ) التتابع ABC

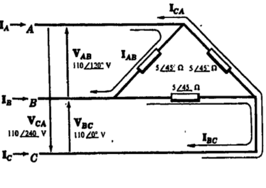
شكل ١٤ – ٥

« ونظام الجهود » هو الجهد بين أى زوج من الأفرع A و B أو B و C أو C و A وفى نظام الأسلاك الأربعة تكون قيمة جهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل هو $1/\sqrt{3}$ × جهد هذا الفرع . فمثلا فى نظام الأطوار الثلاثة وأربعة أسلاك بجهد 208 V يكون للنظام CBA جهود أفرع 208 V وجهد الفرع للجهد المتعادل هو $208/\sqrt{3}$ أو 120 V . وبالإشارة إلى الشكل ١٤ –٥ (ب) يمكن تعيين زوايا الطور للجهود . وعلى ذلك فإن $V_{AB} = 208/240°$ V ، $V_{BC} = 208/0°$ V

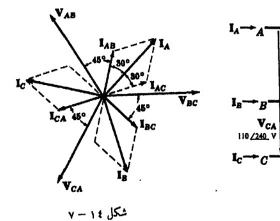
و $V_{CA} = 208/120°$ V ، $V_{AN} = 120/-90°$ V ، $V_{BN} = 120/30°$ V و $V_{CN} = 120/150°$ V

اتزان أحمال نظام الأطوار الثلاثة :

مثال ١ : فى نظام الأطوار الثلاثة بثلاثة أسلاك وجهد 110V وصلت المجموعة ABC بثلاث معاوقات متساوية $5\angle 45^\circ\ \Omega$ متصلة على شكل دلتا . عين تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C . ثم إرسم الشكل المطاور .



شكل ١٤ – ٦



شكل ١٤ – ٧

نرسم الدائرة ونؤشر عليها بالجهود كما فى الشكل ١٤ – ٦ . يوضح الشكل الاتجاهات الموجبة لتيارات الأفرع والتيارات المطاورة . إذن :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{110\angle 120^\circ}{5\angle 45^\circ} = 22\angle 75^\circ = 5{\cdot}7 + j21{\cdot}2\ \text{A}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z} = \frac{110\angle 0^\circ}{5\angle 45^\circ} = 22\angle -45^\circ = 15{\cdot}55 - j15{\cdot}55\ \text{A}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z} = \frac{110\angle 240^\circ}{5\angle 45^\circ} = 22\angle 195^\circ = -21{\cdot}2 - j5{\cdot}7\ \text{A}$$

بتطبيق قانون كيرشوف للتيار عند كل ركن من أركان الأحمال ينتج ،

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 22\angle 75^\circ - 22\angle 195^\circ = 38{\cdot}1\angle 45^\circ\ \text{A}$$

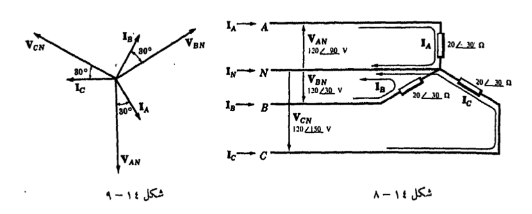
$$I_B = I_{BA} + I_{BC} = -22\angle 75^\circ + 22\angle -45^\circ = 38{\cdot}1\angle -75^\circ\ \text{A}$$

$$I_C = I_{CA} + I_{CB} = 22\angle 195^\circ - 22\angle -45^\circ = 38{\cdot}1\angle 165^\circ\ \text{A}$$

والرسم المطاور المبين فى الشكل ١٤ – ٧ يوضح أن التيارات المتزنة للأفرع هى $38.1A$ وإن زوايا الطور بينها هى 120° .

فى نظام اتزان الأحمال المتصلة على شكل دلتا يكون جهد الفرع مساوياً للجهد المطاور ويكون تيار الفرع مساوياً $\sqrt{3}$ التيار المطاور » .

مثال ٢ : فى نظام ثلاثة أطوار بأربعة أسلاك وجهد 208V وصلت المجموعة CBA بحمل متصل على شكل دلتا معاوقاته $20\angle 30°\Omega$ أوجد تيارات الأفرع . ثم ارسم الشكل المطاور .



شكل ١٤ – ٩

شكل ١٤ – ٨

نرسم الدائرة ونطبق جهود الأفرع بالنسبة للجهد المتعادل وذلك باستخدام الشكل ١٤ – ٥ (ب) . نختار تيارات الأفرع كما فى الرسم ١٤ – ٨ حيث تعود كل التيارات خلال نقطة التعادل . إذن :

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{120\angle -90°}{20\angle -30°} = 6{\cdot}0\angle -60°\,A$$

$$I_B = \frac{V_{BN}}{Z} = \frac{120\angle 30°}{20\angle -30°} = 6{\cdot}0\angle 60°\,A$$

$$I_C = \frac{V_{CN}}{Z} = \frac{120\angle 150°}{20\angle -30°} = 6{\cdot}0\angle 180°\,A$$

وبفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه التيار المتعادل إلى الحمل نحصل على :

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = -(6{\cdot}0\angle -60° + 6{\cdot}0\angle 60° + 6{\cdot}0\angle 180°) = 0$$

ويوضح الشكل المطاور ١٤ – ٩ تيارات الأفرع المتزنة وفيه نجد أن كل تيار سابق لجهد الفرع المناظر بالنسبة للجهد المتعادل بزاوية المعاوقة .

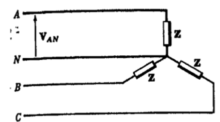
« فى نظام اتزان الأحمال المتصلة على شكل النجمة تتساوى تيارات الأفرع والتيارات المطاورة والتيار المتعادل يساوى صفراً ، وجهد الفرع هو $\sqrt{3}$ الجهد المطاور ، أى أن : $V_L = \sqrt{3}\,V_P$.

الدائرة ذات الفرع الواحد المكافئة للأحمال المتزنة :

باستخدام تحويلات Y-Δ الموضحة فى الفصل الثانى عشر نجد أن مجموعة من ثلاث معاوقات متساوية Z_Δ متصلة على شكل دلتا تكافئ مجموعة من ثلاث معاوقات متساوية Z_Y متصلة على شكل النجمة ، حيث $Z_Y = (1/3)Z_\Delta$. وعلى ذلك فإنه يمكن إجراء مزيد من الحسابات المباشرة على دائرة النجمة لنظام الأحمال المتزنة ذى الثلاثة أطوار بنوعية .

إن الدائرة المكافئة ذات الفرع الواحد هى دائرة بطور واحد للدائرة ذات الأطوار الثلاثة وأربعة أسلاك متصلة على شكل نجمة والموضحة فى الشكل ١٤ – ١٠ ، فيما عدا أن الجهد المستخدم له قيمة جهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل وزاوية طور تساوى

صفراً . وتيار الفرع المحسوب لهذه الدائرة له زاوية طور بالنسبة لزاوية طور الجهد المساوية للصفر . وعلى ذلك فإن تيارات الأفرع الفعلية I_A و I_B و I_C تكون إما سابقة أو لاحقة لجهود الأفرع المناظرة لها بالنسبة للجهد المتعادل بنفس زاوية الطور .



شكل ١٤ – ١٠ الدائرة المكافئة ذات الفرع الواحد

مثال ٣ : احسب تيارات الأفرع فى المثال ١ ، باستخدام طريقة الدائرة المكافئة ذات الفرع الواحد .

إرسم الدائرة ذات الفرع الواحد وارمز بالرمز Δ عند الحمل لتبين أن المعاوقات الفعلية كانت متصلة على شكل دلتا . المعاوقة المكافئة المجموعة المتصلة على شكل النجمة هى .

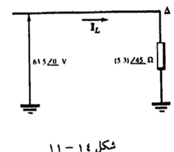
$$Z_Y = Z_\Delta/3 = (5/3)\underline{/45°}\ \Omega$$

وجهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل هو

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 110/\sqrt{3} = 63{\cdot}5\ V$$

إذن تيار الفرع هو .

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z} = \frac{63{\cdot}5\underline{/0°}}{(5/3)\underline{/45°}} = 38{\cdot}1\underline{/-45°}\ A$$



شكل ١٤ – ١١

بما أن التيار لاحق للجهد بزاوية 45° ، فإن تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C تكون لاحقة للجهود المناظرة لها V_{AN} و V_{BN} و V_{CN} بزاوية 45° . وقد حصلنا على الزوايا فى هذه الجهود من المثلث ABC فى الشكل ١٤ – ٥ (أ) . وفيما يلى جهود الأفرع بالنسبة للجهد المتعادل وتيارات الأفرع المناظرة لها .

$$V_{AN} = 63{\cdot}5\underline{/90°}\ V \qquad I_A = 38{\cdot}1\underline{/90° - 45°} = 38{\cdot}1\underline{/45°}\ A$$

$$V_{BN} = 63{\cdot}5\underline{/-30°}\ V \qquad I_B = 38{\cdot}1\underline{/-30° - 45°} = 38{\cdot}1\underline{/-75°}\ A$$

$$V_{CN} = 63{\cdot}5\underline{/-150°}\ V \qquad I_C = 38{\cdot}1\underline{/-150° - 45°} = 38{\cdot}1\underline{/-195°}\ A$$

وهذه التيارات مطابقة لتلك التى حصلنا عليها فى المثال ١ . إذا كان المطلوب حساب التيارات المطاورة فى المعاوقات المتصلة على شكل دلتا فإنه يمكن ايجادها من العلاقة $I_p = I_L/\sqrt{3} = 38{\cdot}1/\sqrt{3} = 22\ A$. ويمكن الحصول على زوايا الطور لهذه التيارات أولا بوضع زوايا الطور لجهود الأفرع بالنسبة لبعضها ثم تعيين التيارات اللاحقة لها بزاوية 45° . أى أن

$$V_{AB} = 110\underline{/120^\circ}\ V \qquad I_{AB} = 22\underline{/120^\circ - 45^\circ} = 22\underline{/75^\circ}\ A$$
$$V_{BC} = 110\underline{/0^\circ}\ V \qquad I_{BC} = 22\underline{/0^\circ - 45^\circ} = 22\underline{/-45^\circ}\ A$$
$$V_{CA} = 110\underline{/240^\circ}\ V \qquad I_{CA} = 22\underline{/240^\circ - 45^\circ} = 22\underline{/195^\circ}\ A$$

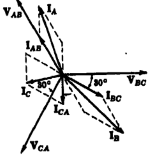
الاحمال غير المتزنة المتصلة على شكل دلتا :

يتكون حل مجموعة الأحمال غير المتزنة المتصلة على شكل دلتا من حساب زوايا الطور للتيارات ثم تطبيق قانون كيرشوف للتيار على نقط الاتصال للحصول على تيارات الأفرع الثلاثة . وتيارات الأفرع فى هذه الحالة ليست متساوية وليس لها زاوية اختلاف طور 120° بعكس الحالة التى فيها أحمال متزنة .

مثال ٤ :

نظام ذو ثلاثة أطوار بثلاثة أسلاك وجهد 240 V . فإذا وصلنا المجموعة ABC بأحمال على شكل دلتا بحيث . $Z_{AB} = 10\angle 0^\circ\ \Omega$ ؛ $Z_{BC} = 10\angle 30^\circ\ \Omega$ ، $Z_{CA} = 15\angle -30^\circ\ \Omega$. فأوجد تيارات الأفرع الثلاثة وارسم الشكل المطاور .

شكل ١٤ — ١٢



شكل ١٤ — ١٣

نصمم الدائرة الموضحة فى الشكل ١٤ — ١٢ ونؤثر عليها بالجهود المطاورة . وعلى ذلك فإن التيارات المطاورة الموضحة فى الرسم مستقلة وتعطى بالعلاقات :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{240\angle 120^\circ}{10\angle 0^\circ} = 24\angle 120^\circ\ A,\ I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_{BC}} = 24\angle -30^\circ\ A,\ I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_{CA}} = 16\angle 270^\circ\ A$$

نطبق قانون كيرشوف للتيار عند نقط اتصال الأحمال فينتج :

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 24\underline{/120^\circ} - 16\underline{/270^\circ} = 38{\cdot}7\underline{/108{\cdot}1^\circ}\ A$$
$$I_B = I_{BA} + I_{BC} = -24\underline{/120^\circ} + 24\underline{/-30^\circ} = 46{\cdot}4\underline{/-45^\circ}\ A$$
$$I_C = I_{CA} + I_{CB} = 16\underline{/270^\circ} - 24\underline{/-30^\circ} = 21{\cdot}2\underline{/190{\cdot}9^\circ}\ A$$

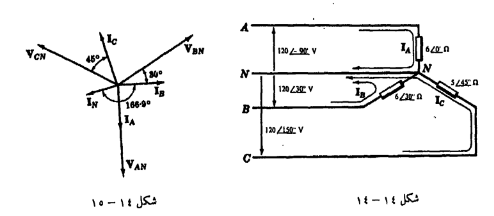
يوضح الشكل ١٤ — ١٣ الرسم المطاور المناظر .

الاحمال غير المتزنة على شكل نجمة ، اربعة اسلاك :

فى نظام الأسلاك الأربعة عندما تكون الأحمال غير متزنة فإنه يمر تيار بنقطة التعادل ويظل الجهد عبر كل معاوقة حمل ثابتاً بنفس قيمة جهد الفرع بالنسبة لجهد التعادل . وتيارات الأفرع غير متساوية وليس لها زاوية طور $120°$

مثال ٥ :

نظام ذو ثلاثة أطوار بأربعة أسلاك وجهد $208\ V$. وصلت فيه المجموعة CBA بأحمال على شكل النجمة بحيث $Z_A = 6\angle 0°\ \Omega$ و $Z_B = 6\angle 30°\ \Omega$ و $Z_C = 5\angle 45°\ \Omega$ أوجد تيارات الأفرع الثلاثة وتيار نقطة التعادل ، ارسم الشكل المطاور .



شكل ١٤ – ١٥ شكل ١٤ – ١٤

نصمم الدائرة كما هو موضح فى الشكل ١٤ – ١٤ ، ونؤشر عليها بالجهود المطاورة ونختار تيارات الأفرع كما هو موضح . وتكون التيارات مستقلة وتعطى بالمعادلات :

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z_A} = \frac{120\angle -90°}{6\angle 0°} = 20\angle -90°\ A,\ I_B = \frac{V_{BN}}{Z_B} = 20\angle 0°\ A,\ I_C = \frac{V_{CN}}{Z_C} = 24\angle 105°\ A$$

والتيار المار بنقطة التعادل هو مجموع تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C .وبفرض ان الاتجاه الموجب للتيار I_N هو فى اتجاه الحمل فإن

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = -(20\angle -90° + 20\angle 0° + 24\angle 105°) = 14{\cdot}1\angle -166{\cdot}9°\ A$$

ويوضح الشكل ١٤ – ١٥ الرسم المطاور المناظر .

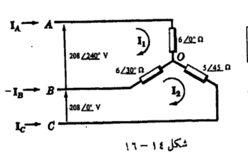
الاحمال غير المتزنة على شكل نجمة ، ثلاث اسلاك :

عند اتصال ثلاثة أفرع فقط A و B و C بأحمال غير متزنة متصلة على شكل نجمة فإن جهد النقطة المشتركة بين معاوقات الأحمال الثلاثة لا يساوى الجهد المتعادل ويرمز لها بالرمز « O » بدلا من N. ويتغير الجهد عبر المعاوقات تغيراً كبيراً من قيمة جهد الفرع إلى قيمة الجهد المتعادل، كما هو موضح فى مثلث الجهد الذى يربط جميع الجهود فى الدائرة. وإزاحة « O » عن N والمعروفة « بإزاحة الجهد المتعادل » لها أهمية خاصة .

مثال ٦ :

نظام ذو ثلاثة أطوار بثلاثة أسلاك وجهد 208V وصلت فيه المجموعة CBA بمعاوقات على شكل نجمة بحيث $Z_A = 6\angle 0^\circ\,\Omega$, و $Z_B = 6\angle 30^\circ\,\Omega$ و $Z_C = 5\angle 45^\circ\,\Omega$. أوجد تيارات الأفرع والجهود المطاورة عبر كل معاوقة. ارسم مثلث الجهد وأوجد إزاحة الجهد المتعادل V_{ON}

نرسم الدائرة ونختار تيارى الشبيكة I_1 و I_2 كما هو موضح فى الشكل ١٤ – ١٦ . نكتب المعادلات المصفوفية للتيارين I_1 و I_2 كما يلى :



شكل ١٤ – ١٦

$$\begin{bmatrix} 6\angle 0^\circ + 6\angle 30^\circ & -6\angle 30^\circ \\ -6\angle 30^\circ & 6\angle 30^\circ + 5\angle 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208\angle 240^\circ \\ 208\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

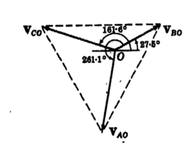
ومنها نجد أن $I_1 = 23{\cdot}3\angle 261{\cdot}1\ \text{A}$ ، $I_2 = 26{\cdot}5\angle -63{\cdot}4^\circ\ \text{A}$

إذن تكون تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C بالاتجاهات الموضحة هى

$$I_A = I_1 = 23{\cdot}3\angle 261{\cdot}1^\circ\ \text{A}$$

$$I_B = I_2 - I_1 = 26{\cdot}5\angle -63{\cdot}4^\circ - 23{\cdot}3\angle 261{\cdot}1^\circ$$
$$= 15{\cdot}45\angle -2{\cdot}5^\circ\ \text{A}$$

$$I_C = -I_2 = 26{\cdot}5\angle 116{\cdot}6^\circ\ \text{A}$$



شكل ١٤ – ١٧

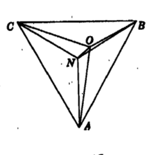
والآن تعطى الجهود عبر المعاوقات الثلاثة بحاصل ضرب التيارات الخطية فى المعاوقات المناظرة .

$$V_{AO} = I_A Z_A = 23{\cdot}3\angle 261{\cdot}1^\circ\,(6\angle 0^\circ) = 139{\cdot}8\angle 261{\cdot}1^\circ\ \text{V}$$

$$V_{BO} = I_B Z_B = 15{\cdot}45\angle -2{\cdot}5^\circ\,(6\angle 30^\circ) = 92{\cdot}7\angle 27{\cdot}5^\circ\ \text{V}$$

$$V_{CO} = I_C Z_C \quad 26{\cdot}5\angle 116{\cdot}6\,(5\angle 45) \quad 132{\cdot}5\angle 161{\cdot}6^\circ\ \text{V}$$

ويكون الشكل المطاور لهذه الجهود الثلاثة الموضح فى الشكل ١٤ – ١٧ مثلثاً متساوى الأضلاع . فى الشكل ١٤ – ١٨ أعيد رسم هذا المثلث وأضيفت إليه نقطة التعادل وذلك لتوضيح إزاحة الجهد المتعادل V_{ON} . ويمكن حساب هذا الجهد باستخدام أى نقطة من النقط الثلاثة A أو B أو C ثم اتباعها بالدليل المناسب لتكون ترميزاً زوجياً للدليل ، وباستخدام النقطة A نحصل على



شكل ١٤ – ١٨

$$V_{ON} = V_{OA} + V_{AN} = -139{\cdot}8\angle 261{\cdot}1^\circ + 120\angle -90$$
$$= 28{\cdot}1\angle 39{\cdot}8^\circ\ \text{V}$$

طريقة ازاحة نقطة التعادل لاحمال غير متزنة على شكل نجمة ، ثلاثة اسلاك

حصلنا فى المثال ٦ على إزاحة الجهد المتعادل V_{ON} بدلالة جهود الأحمال . أما إذا عينا علاقة للجهد V_{ON} مستقلة عن جهود الأحمال فإن التيارات والجهود المطلوبة فى المثال ٦ يمكن الحصول عليها مباشرة كما هو موضح فى المثال ٧ .

لحصول على إزاحة الجهد المتعادل نكتب تيارات الأفرع بدلالة جهود الأحمال ومساحتها .

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A,\ \mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B,\ \mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C \qquad (١)$$

والآن بتطبيق قانون كيرشوف للتيار عند النقطة O فى الشكل ١٤ – ١٩ نجد

$$\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C = 0 \qquad (٢)$$

أو

$$\mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C = 0 \qquad (٣)$$

شكل ١٤ – ١٩

وبالإشارة إلى الشكل ١٤ – ١٨ والتعبير عن الجهود $\mathbf{V}_{AO}$ و $\mathbf{V}_{BO}$ و $\mathbf{V}_{CO}$ بدلالة مركبتى كل منهما ، أى أن

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO} \qquad \mathbf{V}_{BO} = \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO} \qquad \mathbf{V}_{CO} = \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO} \qquad (٤)$$

وبالتعويض بالمعادلة (٤) فى المعادلة (٣) نحصل على

$$(\mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_A + (\mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_B + (\mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO})\mathbf{Y}_C = 0 \qquad (٥)$$

ومنها نجد أن

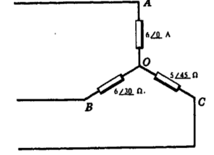
$$\mathbf{V}_{ON} = \frac{\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C}{\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C} \qquad (٦)$$

وقد حصلنا على الجهود V_{AN} و V_{BN} و V_{CN} فى المعادلة (٦) من مثلث الشكل ١٤ – ٥ واستخدام المتتابعة المعطاة فى المسألة . والمساحات Y_A و Y_B و Y_C هى مقلوبات معاوقات الأحمال Z_A و Z_B و Z_C . وبما أن كل الحدود فى المعادلة (٦) إما أنها معطاة أو يمكن الحصول عليها مباشرة فإن إزاحة الجهد المتعادل يمكن حسابها ثم استخدامها فى تعيين تيارات الأفرع .

مثال ٧ :

أوجد تيارات الأفرع والجهود على الأحمال فى المثال ٦ باستخدام طريقة إزاحة نقطة التعادل .

بالإشارة إلى الشكل ١٤ – ٢٠ تكون معادلة إزاحة جهد التعادل هى :



شكل ١٤ – ٢٠

$$\mathbf{V}_{ON} = \frac{\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C}{\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C}$$

حيث

$$\mathbf{Y}_A = 1/(6\angle 0) = 0{\cdot}1667\angle 0 = 0{\cdot}1667 \text{ S}$$
$$\mathbf{Y}_B = 1/(6\angle 30) = 0{\cdot}1667\angle -30 = 0{\cdot}1443 - j0{\cdot}0833 \text{ S}$$
$$\mathbf{Y}_C = 1/(5\angle 45) = 0{\cdot}20\angle -45 = 0{\cdot}1414 - j0{\cdot}1414 \text{ S}$$
$$\mathbf{Y}_A + \mathbf{Y}_B + \mathbf{Y}_C = 0{\cdot}4524 - j0{\cdot}2247 \text{ S}$$
$$= 0{\cdot}504\angle -26{\cdot}5 \text{ S}$$

و

$$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A = 120\angle -90^\circ(0{\cdot}1667\angle 0^\circ) = 20\angle -90^\circ = -j20 \text{ A}$$
$$\mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B = 120\angle 30^\circ(0{\cdot}1667\angle -30^\circ) = 20\angle 0 = 20 \text{ A}$$
$$\mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C = 120\angle 150^\circ(0{\cdot}20\angle -45^\circ) = 24\angle 105^\circ = -6{\cdot}2 + j23{\cdot}2 \text{ A}$$
$$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C = 13{\cdot}8 + j3{\cdot}2 = 14{\cdot}1\angle 13{\cdot}1^\circ \text{ A}$$

إذن

$$\mathbf{V}_{ON} = 14{\cdot}1\angle 13{\cdot}1^\circ / 0{\cdot}504\angle -26{\cdot}5^\circ = 28{\cdot}0\angle 39{\cdot}6^\circ \text{ V}$$

ونحصل على الجهود $\mathbf{V}_{AO}$ و $\mathbf{V}_{BO}$ و $\mathbf{V}_{CO}$ باستخدام $\mathbf{V}_{NO}$ وجهد الفرع الملائم بالنسبة لجهد المتعادل

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle -90^\circ - 28{\cdot}0\angle 39{\cdot}6^\circ = 139{\cdot}5\angle 261{\cdot}1 \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle 30^\circ - 28{\cdot}0\angle 39{\cdot}6^\circ = 92{\cdot}5\angle 27{\cdot}1^\circ \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle 150^\circ - 28{\cdot}0\angle 39{\cdot}6 = 132{\cdot}5\angle 161{\cdot}45^\circ \text{ V}$$

ونحصل على تيارات الأفرع مباشرة من الجهود ومسامحات الأحمال المناظرة لها .

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A = 139{\cdot}5\angle 261{\cdot}1^\circ(0{\cdot}1667\angle 0^\circ) = 23{\cdot}2\angle 261{\cdot}1^\circ \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B = 92{\cdot}5\angle 27{\cdot}1^\circ(0{\cdot}1667\angle -30^\circ) = 15{\cdot}4\angle -2{\cdot}9^\circ \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C = 132{\cdot}5\angle 161{\cdot}45^\circ(0{\cdot}20\angle -45^\circ) = 26{\cdot}5\angle 116{\cdot}45^\circ \text{ A}$$

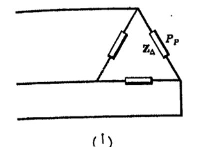
التيارات والجهود السابقة مطابقة تماماً لنتائج المثال ٦ .

قدرة احمال متزنة ذات ثلاثة اطوار :

بما أن المعاوقات المطاورة المتزنة المتصلة على شكل نجمة أو دلتا يمر بها تيارات متساوية فإن القدرة المطاورة تكون ثلث القدرة الكلية . في الشكل ١٤ – ٢١ (أ) نجد أن الجهد على المعاوقة $\mathbf{Z}\Delta$ هو جهد الفرع وأن التيار تيار مطاور . والزاوية بين الجهد والتيار هي زاوية المعاوقة . إذن القدرة المطاورة هي

$$P_P = V_L I_P \cos\theta \qquad (٧)$$

والقدرة الكلية هى



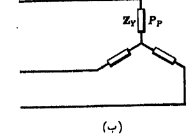
(أ)

$$P_T = 3\, V_L I_P \cos\theta \qquad (٨)$$

بما أن $I_L = \sqrt{3}\, I_P$ إذن قدرة الأحمال المتزنة المتصلة على شكل دلتا هى

$$P_T = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta \qquad (٩)$$

يمر فى معاوقات الشكل ١٤ - ٢١ (ب) المتصلة على شكل نجمة ، تيارات الأفرع والجهد على Z_Y هو جهد مطاور . والزاوية بين هذا الجهد والتيار هى زاوية المعاوقة . إذن القدرة المطاورة هى



(ب)

$$P_P = V_P I_L \cos\theta \qquad (١٠)$$

والقدرة الكلية هى

$$P_T = 3\, V_P I_L \cos\theta \qquad (١١)$$

بما أن $V_L = \sqrt{3}\, V_P$ إذن

$$P_T = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta \qquad (١٢)$$

شكل ١٤ - ٢١

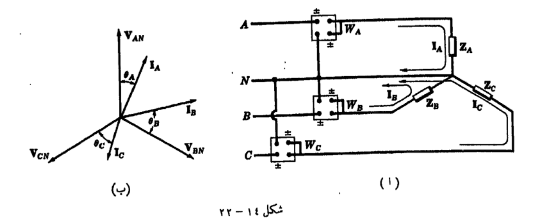
بما أن المعادلتين (٩) و (١٢) متطابقتان ، فإن القدرة الكلية فى نظام الأحمال المتزنة ذا الأطوار الثلاثة تعطى $\sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta$ ، حيث θ هى زاوية معاوقة الحمل أو هى زاوية المعاوقة المكافئة فى حالة اتصال عديد من الأحمال المتزنة لتكوين نفس النظام .

وبما أن القدرة الظاهرية « فولت - أمبير » S_T والقدرة الكلية المفاعلية Q_T متعلقتان بالقدرة الكلية P_T (الفصل السابع) . إذن فإنه فى نظام الأحمال المتزنة ذى الأطوار الثلاثة تعطى القدرة والقدرة المفاعلية بالمعادلات

$$P_T = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\theta \qquad S_T = \sqrt{3}\, V_L I_L \qquad Q_T = \sqrt{3}\, V_L I_L \sin\theta \qquad (١٣)$$

الواتميتر والاحمال على شكل نجمة ، اربعة اسلاك :

الواتميتر هو جهاز به ملف لقراءة الجهد والتيار وعلى ذلك فإن انحرافه يتناسب مع $VI\cos\theta$ حيث θ هى الزاوية بين الجهد والتيار . ويحتاج نظام الأحمال المتصل على شكل نجمة وأربعة أسلاك لثلاثة واتميتر يوصل كل واحد منهما فى فرع من الأفرع الثلاثة كما فى الشكل ١٤ - ٢٢ (أ) .



شكل ١٤ - ٢٢

يفترض فى الشكل المطلوب ١٤ - ٢٢ (ب) أن التيار فى الطور A لاحق وتيارا الطورين B و C سابقان وزوايا الأطوار هى θ_A و θ_B و θ_C على الترتيب . إذن فقراءات الواتميتر هى

$$W_A = V_{AN} I_A \cos \measuredangle_A^{AN}, \quad W_B = V_{BN} I_B \cos \measuredangle_B^{BN}, \quad W_C = V_{CN} I_C \cos \measuredangle_C^{CN} \tag{١٤}$$

حيث تعبر $\measuredangle_A^{AN}$ عن الزاوية بين V_{AN} و I_A . ويقرأ الواتميتر W_A القدرة فى الطور A بينما يقرأ W_B و W_C القدرة فى الطورين B و C على الترتيب . والقدرة الكلية هى

$$P_T = W_A + W_B + W_C \tag{١٥}$$

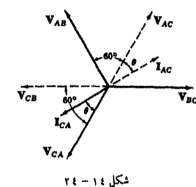
الطريقة باستخدام اثنين من الواتميتر :

تعطى القدرة الكلية فى نظام الأطوار الثلاثة وثلاثة أسلاك بمجموع قرءاتى جهازى الواتميتر المتصلين فى أى فرعين مع توصيل ملفى الجهد بهما بالفرع الثالث كما هو موضح فى الشكل ١٤ - ٢٣ . وتكون قراءات الأجهزة هى

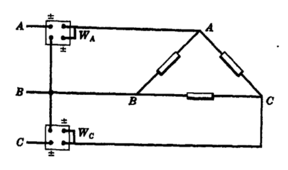
$$W_C = V_{CB} I_C \cos \measuredangle_C^{CB} \quad ، \quad W_A = V_{AB} I_A \cos \measuredangle_A^{AB} \tag{١٦}$$

بتطبيق قانون كيرشوف للتيار على نقطتى الاتصال A و C فى الأحمال المتصلة على شكل دلتا نحصل على

$$I_C = I_{CA} + I_{CB} \quad ، \quad I_A = I_{AB} + I_{AC} \tag{١٧}$$



شكل ١٤ - ٢٤



شكل ١٤ - ٢٣

وبالتعويض عن I_A و I_C من المعادلة (١٧) فى المعادلة (١٦) نحصل على

$$W_A = V_{AB} I_{AB} \cos \measuredangle^{AB}_{AB} + V_{AB} I_{AC} \cos \measuredangle^{AB}_{AC}$$

(١٨)

$$W_C = V_{CB} I_{CA} \cos \measuredangle^{CB}_{CA} + V_{CB} I_{CB} \cos \measuredangle^{CB}_{CB}$$

وتعبر الحدود $V_{AB} I_{AB} \cos \measuredangle^{AB}_{AB}$ ، $V_{CB} I_{CB} \cos \measuredangle^{CB}_{CB}$ مباشرة القدرة فى الطورين AB و CB للحمل . والحدان الباقيان يحتويان على $V_{AB} I_{AC}$ ، $V_{CB} I_{CA}$ والذى يمكن كتابتهما الآن $V_L I_{AC}$ حيث أن كلا من V_{AB} و V_{CB} هو جهد فروع و I_{CA} I_{AC} . ولتمييز هذين الحدين نرسم الشكل ١٤ - ٢٤ المطاور وفيه التيار I_{AC} لاحق للجهد V_{AC} بزاوية θ .

من الشكل المطاور نجد أن

$$\measuredangle^{CB}_{CA} = 60° - \theta \qquad \measuredangle^{AB}_{AC} = 60° + \theta \tag{19}$$

والآن بإضافة الحدين الباقيين فى المعادلة (١٨) والتعويض $(60° + \theta)$ و بـ$(60° - \theta)$ بدلا من $\measuredangle^{AB}_{AC}$ ، $\measuredangle^{CB}_{CA}$ على الترتيب نجد أن

$$V_L I_{AC} \cos (60° + \theta) + V_L I_{AC} \cos (60° - \theta) \tag{20}$$

وبما أن $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ فإن

$$V_L I_{AC} (\cos 60° \cos \theta - \sin 60° \sin \theta + \cos 60° \cos \theta + \sin 60° \sin \theta) \tag{21}$$

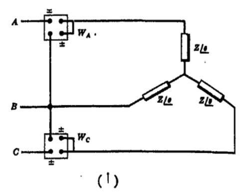
أو

$$V_L I_{AC} \cos \theta \tag{22}$$

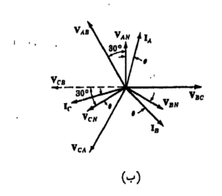
وهى القدرة فى الطور الباقى AC للأحمال . ونرى من هذا أن جهازين من الواتميتر يمكن أن يعبرا عن القدرة الكلية فى فى الأحمال المتصلة على شكل دلتا . تترك طريقة استخدام جهازين من الواتميتر فى حالة أحمال متصلة على شكل نجمة كتمرين للقارىء

تطبيق طريقة اثنين من الواتميتر على احمال متزنة :

لتوضيح تطبيق طريقة اثنين من الواتميتر على أحمال متزنة ، نعتبر الثلاثة معاوقات المتساوية المتصلة على شكل النجمة والموضحة فى الشكل ١٤ – ٢٥ (أ) يوضح الشكل ١٤ – ٢٥ (ب) الشكل المطاور للتتابع ABC بفرض أن التيار لاحق بزاوية طور مقدارها θ .



(أ)



(ب)

شكل ١٤ – ٢٥

والآن بتوصيل الجهازين فى الفرعين A و C فإن قراءتيهما

$$W_C = V_{CB} I_C \cos \measuredangle_C^{CB} \quad \text{و} \quad W_A = V_{AB} I_A \cos \measuredangle_A^{AB} \tag{٢٣}$$

من الشكل المطاور نجد أن

$$\measuredangle_C^{CB} = 30° - \theta \qquad \measuredangle_A^{AB} = 30° + \theta \tag{٢٤}$$

بالتعويض من المعادلة (٢٤) فى المعادلة (٢٣) نحصل على

$$W_C = V_{CB} I_C \cos (30° - \theta) \quad \text{و} \quad W_A = V_{AB} I_A \cos (30° + \theta) \tag{٢٥}$$

عند استخدام طريقة جهازين للواتميتر على أحمال متزنة فإن قراءتى الجهازين هما $V_L I_L \cos (30° + \theta)$ و $V_L I_L \cos (30° - \theta)$ حيث θ هى زاوية المعاوقة . ويمكن استخدام القراءتين لحصول على الزاوية θ .

بكتابة معادلة W_1 واستخدام جيب تمام مجموع زاويتين نحصل على

$$W_1 = V_L I_L (\cos 30° \cos \theta - \sin 30° \sin \theta) \tag{٢٦}$$

وبالمثل

$$W_2 = V_L I_L (\cos 30° \cos \theta + \sin 30° \sin \theta) \tag{٢٧}$$

ومجموعهما هو $W_1 + W_2 = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos \theta$ والفرق بينهما هو $W_2 - W_1 = V_L I_L \sin \theta$ وبذلك نجد أن

$$\tan \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2} \right) \tag{٢٨}$$

إذن ظل زاوية المعاوقة Z يساوى $\sqrt{3}$ × النسبة بين الفرق بين قراءتى الجهازين إلى مجموع القراءتين . وبدون معرفة الأفرع التى يوصل فيها الجهازين وكذلك مجموعة المتتابعة فإنه لا يمكن التمييز بين $+\theta$ و $-\theta$ وعلى ذلك فعند معرفة كل من المتتابعة وموضعى الجهازين فإنه يمكن تثبيت الإشارة بالعلاقتين التاليتين . فنجد للمتتابعة ABC :

$$\tan\theta = \sqrt{3}\,\frac{W_A - W_B}{W_A + W_B} = \sqrt{3}\,\frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{3}\,\frac{W_C - W_A}{W_C + W_A} \qquad (٢٩)$$

للمتتابعة CBA .

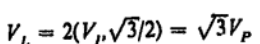
$$\tan\theta = \sqrt{3}\,\frac{W_B - W_A}{W_B + W_A} = \sqrt{3}\,\frac{W_C - W_B}{W_C + W_B} = \sqrt{3}\,\frac{W_A - W_C}{W_A + W_C} \qquad (٣٠)$$

مســـــائل محلولة

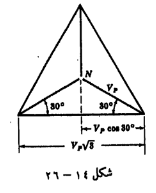
١٤ – ١ بين أن جهد الفرع V_L فى نظام الأطوار الثلاثة يساوى $\sqrt{3}$ جهد الفرع بالنسبة لجهد المتعادل V_P .

يمثل المثلث المتساوى الأضلاع الموضح فى الشكل ١٤ – ٢٦ جهود الأطوار الثلاثة وفيه يتناسب طول الضلع مع جهد الفرع V_L ونقطة التعادل N فى مركز المثلث .

المسقط الأفقى لجهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل هو $V_p \cos 30^\circ$ أو $V_p\sqrt{3}/2$ وحيث أن القاعدة هى مجموع مسقطين فانه ينتج أن



$$V_L = 2(V_p\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}V_p$$



شكل ١٤ – ٢٦

١٤ – ٢ احسب تيار أقصى تحميل الملف فى كل من النظامين دلتا والنجمة بفرض جهد ذى ثلاثة أطوار بمعدل 25 k VA وجهد 480 V .

فى حالة توصيلات النجمة يكون تيار الفرع وتيار الملف لهما نفس القيمة ولنظام الثلاثة أطوار المتزن يكون

$$\text{kVA} = \sqrt{3}V_L I_L \times 10^{-3} \quad \text{و} \quad I_L = \frac{\text{kVA}}{\sqrt{3}V_L \times 10^{-3}} = \frac{25}{\sqrt{3}(480 \times 10^{-3})} = 30{\cdot}1\ \text{A}$$

وفى حالة توصيلات – دلتا جهد متردد له نفس معدل kVA فإن تيار أقصى تحميل للفرع هو $30.1A$ وتيار الملف هو $I_L/\sqrt{3}$. إذن $I_{\text{coil}} = 30{\cdot}1/\sqrt{3} = 17{\cdot}35\ \text{A}$

١٤ – ٣ نظام ذو طورين فيه جهد الفرع بالنسبة لجهد المتعادل 150 v ، يؤثر على أحمال متزنة متصلة على شكل دلتا معاوقتها متساوية $10\angle 53.1^\circ\ \Omega$. أوجد تيار الفرع والقدرة الكلية .

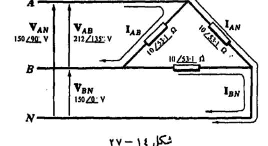
فى حالة نظام ذى طورين فإن جهدى الفرع بالنسبة للجهد المتعادل لها زاوية فرق طور 90° . إذن إذا كان V_{BN} هو جهد الإسناد فإن V_{AN} يصنع زاوية 90° كما فى الشكل ١٤-٢٧ . وجهد الفرع بالنسبة لفرع آخر يساوى $\sqrt{2}$ × جهد الفرع بالنسبة إلى الجهد المتعادل . إذن $V_{AB} = \sqrt{2}(150) = 212$ V .

والتيارات المطاورة هى :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{212\angle 135^\circ}{10\angle 53.1^\circ} = 21.2\angle 81.9^\circ \text{ A}$$

$$I_{AN} = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{150\angle 90^\circ}{10\angle 53.1^\circ} = 15.0\angle 36.9^\circ \text{ A}$$

$$I_{BN} = \frac{V_{BN}}{Z} = \frac{150\angle 0}{10\angle 53.1^\circ} = 15.0\angle -53.1^\circ \text{ A}$$



شكل ١٤ – ٢٧

وتعطى تيارات الأفرع بدلالة التيارات المطاورة بتطبيق قانون كيرشوف للتيار على نقط اتصال الأحمال فى الشكل دلتا . وإذا فرضنا أن الاتجاه الموجب لهذه التيارات هو فى الاتجاه إلى الأحمال ، إذن

$$I_A = I_{AN} + I_{AB} = 15.0\angle 36.9^\circ + 21.2\angle 81.9^\circ = 33.5\angle 63.4^\circ \text{ A}$$
$$I_B = I_{BN} + I_{BA} = 15.0\angle -53.1^\circ - 21.2\angle 81.9^\circ = 33.6\angle -79.7^\circ \text{ A}$$
$$I_N = I_{NA} + I_{NB} = -15.0\angle 36.9^\circ - 15.0\angle -53.1^\circ = 21.2\angle 171.86^\circ \text{ A}$$

ونحصل على القدرة الكلية باستخدام القيمة الفعالة للتيار المار فى معاوقة الحمل . إذن

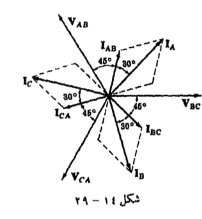
$$P_{AB} = I_{AB}^2 R = (21.2)^2 6 = 2700 \text{ W}$$
$$P_{AN} = I_{AN}^2 R = (15.0)^2 6 = 1350 \text{ W}$$
$$P_{BN} = I_{BN}^2 R = (15.0)^2 6 = 1350 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هى = $5400\ W$

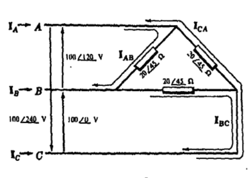
١٤ – نظام ذو ثلاثة أطوار وثلاثة أسلاك وجهد 100 V يؤثر بالمجموعة ABC على أحمال متزنة متساوية على شكل دلتا معاوقتها $20\angle 45^\circ\ \Omega$. عين تيارات الأفرع وارسم الشكل المطاور .

تؤثر بجهود الأفرع لمتتابعة ABC على الدائرة المعطاة فى الشكل ١٤ – ٢٨ . إذن التيارات المطاورة المختارة هى :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{100\angle 120^\circ}{20\angle 45^\circ} = 5.0\angle 75^\circ \text{ A},\ I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z} = 5.0\angle -45^\circ \text{ A},\ I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z} = 5.0\angle 195^\circ \text{ A}$$



شكل ١٤ – ٢٩



شكل ١٤ – ٢٨

لحصول على تيارات الأفرع كما فى شكل الدائرة ، فإننا نطبق قانون كيرشوف للتيار عند كل نقطة اتصال للأحمال . إذن

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 5\cdot0\angle75^\circ - 5\cdot0\angle195^\circ = 8\cdot66\angle45^\circ\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -5\cdot0\angle75^\circ + 5\cdot0\angle-45^\circ = 8\cdot66\angle-75^\circ\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 5\cdot0\angle195^\circ - 5\cdot0\angle-45^\circ = 8\cdot66\angle165^\circ\ \text{A}$$

الشكل ١٤ – ٢٩ يوضح الرسم المطاور لتيارات الأفرع والتيارات المطاورة .

١٤ – ٥ أوجد قراءات الواتميتر وذلك عند تطبيق طريقة جهازى الواتميتر على دائرة المسألة ١٤ – ٤ .
قراءات الواتميتر فى حالة أحمال متزنة بثلاثة أطوار وثلاثة أسلاك هى :

$$W_2 = V_L I_L \cos(30^\circ - \theta) \quad , \quad W_1 = V_L I_L \cos(30^\circ + \theta) \qquad (1)$$

حيث θ هى زاوية معاوقة الحمل . لدينا من المسألة ١٤ – ٤ ، $V_L = 100, I_L = 8\cdot66$ وزاوية الحمل هى 45° .
بالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (١) نحصل على

$$W_1 = 100(8\cdot66)\cos(30^\circ + 45^\circ) = 866\cos75^\circ = 224\ \text{W}$$

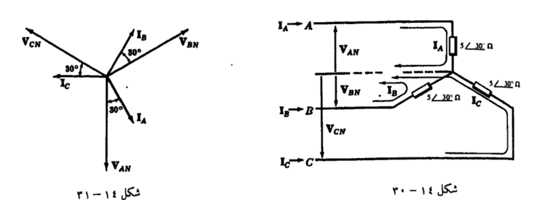
$$W_2 = 100(8\cdot66)\cos(30^\circ - 45^\circ) = 866\cos(-15^\circ) = 836\ \text{W}$$

والقدرة الكلية هى $P_T = W_1 + W_2 = 1060\ \text{W}$

وكإختبار للنتيجة فإنه يمكننا حساب القدرة الكلية فى أى معاوقات متزنة ذا ثلاثة أطوار من العلاقة :

$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}\,100(8\cdot66)\cos45^\circ = 1060\ \text{W}$$

١٤ – ٦ وصلت ثلاثة معاوقات متساوية قيمة كل منها $5\angle30^\circ\ \Omega$. ومتصلة على شكل نجمة بالمجموعة CBA لثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 150 V . أوجد تيارات الأفرع وارسم الشكل المطاور .



شكل ١٤ – ٣١

شكل ١٤ – ٣٠

يمكننا فى نظام متزن ذى ثلاثة أسلاك على شكل نجمة إضافة نقطة التعادل كما فى شكل ١٤ – ٣٠ . إذن بتطبيق جهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل الذى قيمته

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 150/\sqrt{3} \quad 86{\cdot}6\ \text{V}$$

بنفس زاوية طور المتتابعة CBA . وتيارات الأفرع هى :

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{86{\cdot}6\angle -90^\circ}{5\angle -30^\circ} = 17{\cdot}32\angle -60^\circ\ \text{A},\ \mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}} = 17{\cdot}32\angle 60^\circ\ \text{A},\ \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}} = 17{\cdot}32\angle 180^\circ\ \text{A}$$

يوضح الرسم المطاور ١٤ – ٣١ أن مجموعة تيارات الأفرع المتزنة سابقة لجهود الأفرع بالنسبة للجهد المتعادل بزاوية 30° ، وهى زاوية معاوقة الحمل .

١٤ – ٧ أوجد قراءتى الواتميتر وذلك عند تطبيق طريقة جهازى الواتميتر على دائرة المسألة ١٤ – ٦ .

فى حالة أحمال متزنة ذى ثلاثة أطوار نجد أن

$$W_1 = V_L I_L \cos(30^\circ + \theta) = 150(17{\cdot}32)\cos(30^\circ + 30^\circ) = 1300\ \text{W}$$

$$W_2 = V_L I_L \cos(30^\circ - \theta) = 150(17{\cdot}32)\cos(30^\circ - 30^\circ) = 2600\ \text{W}$$

والقدرة الكلية هى $P_T = W_1 + W_2 = 3900\ \text{W}$

وكإختبار للنتيجة يمكننا حساب القدرة المطاورة $P_P = I_L^2 R = (17{\cdot}32)^2 4{\cdot}33 = 1300\ \text{W}$ ثم حساب القدرة الكلية

$$P_T = 3P_P = 3(1300) \cdot 3900\ \text{W}$$

أو فى حالة أحمال متزنة ذى ثلاثة أطوار فإن القدرة الكلية هى

$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}(150)(17{\cdot}32)\cos(-30^\circ) = 3900\ \text{W}$$

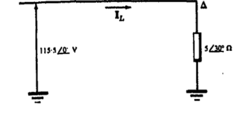
١٤ – ٨ وصلت ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها $15\underline{/30°}\,\Omega$ متصلة على شكل دلتا بمجموعة ABC لنظام ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد $200\ V$. أوجد تيارات الأفرع باستخدام طريقة دائرة الفرع الواحد المكافئة .

بما أن الحمل متصل على شكل دلتا فإننا نحصل أولا على المعاوقات المكافئة للحمل والمتصلة على شكل نجمة :

$$Z_Y = Z_\Delta/3 = 15\angle 30°/3 = 5\angle 30°\ \Omega$$

وقيمة جهد الفرع بالنسبة لجهد التعادل هى

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 200/\sqrt{3} = 115.5\ V$$



شكل ١٤ - ٣٢

والآن فإن الجهد المؤثر على دائرة الفرع الواحد المكافىء الموضحة فى الشكل ١٤ – ٣٢ هو $115.5\underline{/0°}\ V$ والتيار الناتج هو

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z} = \frac{115.5\angle 0°}{5\angle 30°} = 23.1\angle -30°\ A$$

وللحصول على تيارات الأفرع I_A و I_B و I_C فإننا نعين أولا زاوية الطور فى جهد الفرع المناظر بالنسبة للجهد المتعادل فى المتتابعة ABC . وبما أن زاوية طور V_{AN} هى $90°$.

$I_A = 23.1\angle 90° - 30° = 23.1\angle 60°\ A$. وبطريقة مماثلة نحصل على $I_B = 23.1\angle -60°\ A$ ، $I_C = 23.1\angle 180°\ A$

وترتبط تيارات المعاوقات المتصلة على شكل دلتا بتيارات الأفرع بالعلاقة $I_L = \sqrt{3}I_p$ ومنها نجد أن

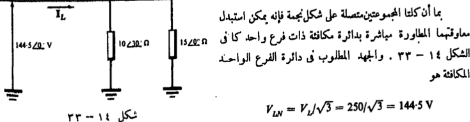
$$I_p = 23.1/\sqrt{3} = 13.3\ A$$

وزاوية طور V_{AB} فى المتتابعة ABC هى $120°$ ، إذن $I_{AB} = 13.3\angle 120° - 30° = 13.3\angle 90°\ A.$

وبنفس الطريقة نجد أن $I_{BC} = 13.3\angle -30°\ A$ ، $I_{CA} = 13.3\angle 210°\ A$

١٤ – ٩ وصلت مجموعتان إحداهما متصلة على شكل نجمة وتتكون من ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها $10\underline{/30°}\,\Omega$ ، والثانية متصلة على شكل نجمة أيضاً وتتكون من ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها $5\underline{/0}\,\Omega$ ، بنظام واحد ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك – وجهد $250V$ أوجد القدرة الكلية

بما أن كلتا المجموعتين متصلة على شكل نجمة فإنه يمكن استبدال معاوقتهما المطاورة مباشرة بدائرة مكافئة ذات فرع واحد كما فى الشكل ١٤ – ٣٣ . والجهد المطلوب فى دائرة الفرع الواحد المكافئة هو



شكل ١٤ – ٣٣

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 250/\sqrt{3} = 144.5\ V$$

إذن التيار هو

$$\mathbf{I}_L = \frac{144{\cdot}5\angle 0}{10\angle 30} + \frac{144{\cdot}5\angle 0}{15\angle 0}$$

$$= 14{\cdot}45\angle -30 + 9{\cdot}62\angle 0^\circ = 23{\cdot}2\angle -18{\cdot}1^\circ \text{ A}$$

فى معادلة القدرة $P = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$ الزاوية θ هى زاوية المعاوقة فى حالة وجود مجموعة واحدة . أما فى حالة عدة مجموعات متصلة بنفس النظام فإن θ هى زاوية معاوقة الحمل المكافىء . فى حالة حساب التيار $\mathbf{I}_L$ فإننا اعتبرنا مجموعتى الأحمال ووجدنا أن التيار لاحق للجهد بزاوية 18.1° . وعلى هذا يتضح لنا أن المعاوقة المكافئة حثية ولها زاوية 18.1° . إذن

$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}\,250(23{\cdot}2)\cos 18{\cdot}1^\circ = 9530 \text{ W}$$

١٤ – ١٠ إذا أثرنا بالمجموعة ABC لنظام ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 208 V على ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها $12\angle 30^\circ\ \Omega$ متصلة على شكل دلتا وعلى ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها $5\angle 45^\circ\Omega$ متصلة على شكل نجمة . فأوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

حيث أن المجموعة الأولى للأحمال متصلة على شكل دلتا فإننا نحصل على شكل نجمة المكافىء لهـا

$$\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3 = 12\angle 30^\circ/3 = 4\angle 30^\circ\ \Omega$$

وحيث أن جهد الفرع هو 208 V فإن جهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل هو $208/\sqrt{3}$ V أو 120 V .

يوضح الشكل ١٤ – ٣٤ دائرة الفرع الواحد المكافئة وفيها معاوقتا الحمل هما $4\angle 30^\circ\Omega$ ، $5\angle 45^\circ\Omega$ ويمكن استبدال هاتين المعاوقتين بمعاوقة مكافئة هى

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{4\angle 30^\circ(5\angle 45^\circ)}{4\angle 30^\circ + 5\angle 45^\circ} = 2{\cdot}24\angle 36{\cdot}6^\circ\ \Omega$$

إذن التيار هو

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{LN}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{120\angle 0^\circ}{2{\cdot}24\angle 36{\cdot}6^\circ} = 53{\cdot}6\angle -36{\cdot}6^\circ \text{ A}$$

شكل ١٤ – ٣٤

والجهد $\mathbf{V}_{AN}$ فى المتتابعة ABC له زاوية طور 90° وعلى هذا فإن

$$\mathbf{I}_A = 53{\cdot}6\angle(90^\circ - 36{\cdot}6^\circ) = 53{\cdot}6\angle 53{\cdot}4^\circ \text{ A}$$

وبالمثل نجد أن $\mathbf{I}_B = 53{\cdot}6\angle -66{\cdot}6^\circ$ A

و

$$\mathbf{I}_C = 53{\cdot}6\angle -186{\cdot}6^\circ \text{ A}$$

القدرة الكلية هى

$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3}\,208(53{\cdot}6)\cos 36{\cdot}6^\circ = 15\,500 \text{ W}$$

١٤ – ١١ تؤثر المجموعة CBA لنظام ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 240 V على أحمال متصلة على شكل دلتا فيها $\mathbf{Z}_{AB} = 25/90°\ \Omega$ و $\mathbf{Z}_{BC} = 15\angle 30°\ \Omega$, $\mathbf{Z}_{CA} = 20\angle 0°\ \Omega$ أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

تؤثر بجهود الأفرع للمتتابعة CBA على الأحمال المتصلة على شكل دلتا والموضحة فى الشكل ١٤ – ٣٥ ، ونختار التيارات المطاورة كما هو موضح فى الشكل . إذن

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{AB}} = \frac{240\angle 240°}{25\angle 90°} = 9{\cdot}6\angle 150°\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_{BC}} = \frac{240\angle 0}{15\angle 30} = 16{\cdot}0\angle -30°\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_{CA}} = \frac{240\angle 120°}{20\angle 0°} = 12{\cdot}0\angle 120°\ \text{A}$$

شكل ١٤ - ٣٥

والآن نحسب تيارات الأفرع بدلالة التيارات المطاورة

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 9{\cdot}6\angle 150° - 12\angle 120 = 6{\cdot}06\angle 247\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{BC} = -9{\cdot}6\angle 150° + 16\angle -30 = 25{\cdot}6\angle -30°\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} + \mathbf{I}_{CB} = 12\angle 120° - 16\angle -30° = 27{\cdot}1\angle 137{\cdot}2°\ \text{A}$$

وكما هو متوقع فى حالة الأحمال غير المتزنة فإن تيارات الأفرع غير متساوية .

ونحسب القدرة فى كل طور كما يلى

المعاوقة $\mathbf{Z}_{AB} = 25\angle 90° = 0 + j25$ ohms ، أى أن $R_{AB} = 0$ و $I_{AB} = 9.6$ A . إذن

$$P_{AB} = I^2_{AB}R_{AB} = (9{\cdot}6)^2(0) = 0$$

المعاوقة $\mathbf{Z}_{BC} = 15\angle 30° = 13 + j7{\cdot}5$ ohms ، أى أن $R_{BC} = 13\ \Omega$ و $I_{BC} = 16$ A . إذن

$$P_{BC} = I^2_{BC}R_{BC} = (16)^2(13) = 3330\ \text{W}$$

المعاوقة $\mathbf{Z}_{CA} = 20\angle 0° = 20 + j0$ ohms. ، أى ان $R_{CA} = 20\ \Omega$ و $I_{CA} = 12$ A . إذن

$$P_{CA} = I^2_{CA}R_{CA} = (12)^2(20) = 2880\ \text{W}$$

والقدرة الكلية هى مجموع القدرات المطاورة ،

$$P_T = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 0 + 3330 + 2880 = 6210\ \text{W}$$

١٤ – ١٢ أوجد قراءات الواتميتر عند استخدام طريقة جهازى الواتميتر فى دائرة المسألة ١٤ – ١١ إذا كان الجهازان متصلين فى الفرعين (أ) A و B ، (ب) A و C .

(أ) فى حالة توصيل الجهازين فى الفرعين A و B فإن

$$W_A = V_{AC} I_A \cos \measuredangle_A^{AC} \quad (١) \qquad ، \qquad W_B = V_{BC} I_B \cos \measuredangle_B^{BC} \quad (٢)$$

لدينا من المسألة ١٤ – ١١ ، $V_{AC} = 240\angle{-60^\circ}$ V و $I_A = 6{\cdot}06\angle{247{\cdot}7^\circ}$ A . إذن الزاوية $\measuredangle_A^{AC}$ هى الزاوية بين 247.7° و -60° أو 52.3° . بالتعويض فى (١) نجد أن

$$W_A = 240(6{\cdot}06) \cos 52{\cdot}3^\circ = 890 \text{ W}$$

لدينا أيضاً من المسألة ١٤–١١ أن $V_{BC} = 240\angle{0^\circ}$ V و $I_B = 25{\cdot}6\angle{-30^\circ}$ A . إذن $\measuredangle_B^{BC} = 30^\circ$.

وبالتعويض فى (٢) نجد أن

$$W_B = 240(25{\cdot}6) \cos 30^\circ = 5320 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هى $P_T = W_A + W_B = 890 + 5320 = 6210$ W

(ب) فى حالة توصيل الجهازين فى الفرعين A و C فإن

$$W_A = V_{AB} I_A \cos \measuredangle_A^{AB} \quad (٣) \qquad ، \qquad W_C = V_{CB} I_C \cos \measuredangle_C^{CB} \quad (٤)$$

لدينا من المسألة ١٤ – ١١ إن $V_{AB} = 240\angle{240^\circ}$ V . وبما أن $I_A = 6{\cdot}06\angle{247{\cdot}7}$ A . إذ $\measuredangle_A^{AB} = 7{\cdot}7^\circ$. وبالتعويض فى (٣) نجد أن

$$W_A = 240(6{\cdot}06) \cos 7{\cdot}7^\circ = 1440 \text{ W}$$

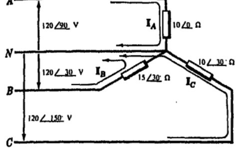
وأيضاً $V_{CB} = 240\angle{180^\circ}$ V و $I_C = 27{\cdot}1\angle{132{\cdot}2^\circ}$ A ومنها نجد أن $\measuredangle_C^{CB} = 42{\cdot}8^\circ$.

وبالتعويض فى (٤) نجد أن

$$W_C = 240(27{\cdot}1) \cos 42{\cdot}8^\circ = 4770 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هى $P_T = W_A + W_C = 1440 + 4770 = 6210$ W

١٤ – ١٣ تؤثر المجموعة *CBA* لنظام ذى ثلاثة أطوار — أربعة أسلاك بجهد 208 V على مجموعة أحمال متصلة على شكل نجمة فيها $\mathbf{Z}_A = 10\angle 0°$ ohms ، $\mathbf{Z}_B = 15\angle 30°$ ohms و $\mathbf{Z}_C = 10\angle -30°$ ohms . أوجد تيارات الأفرع والتيار المتعادل والقدرة الكلية .



شكل ١٤ – ٣٦

بالتأثير بجهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل للمتتابعة *ABC* على الدائرة الموضحة فى الشكل ١٤ – ٣٦ ، وحساب تيارات الأفرع بفرض الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الأحمال ، نجد أن

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AN}/\mathbf{Z}_A = (120\angle 90°)/(10\angle 0°) = 12\angle 90° \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BN}/\mathbf{Z}_B = (120\angle -30°)/(15\angle 30°) = 8\angle -60° \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CN}/\mathbf{Z}_C = (120\angle -150°)/(10\angle -30°) = 12\angle -120° \text{ A}$$

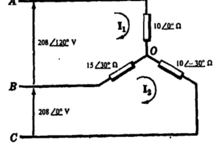
تحتوى نقطة التعادل على مجموع تيارات الأفرع المطاورة وبفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الأحمال فإن

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = -(12\angle 90° + 8\angle -60° + 12\angle -120°) = 5{\cdot}69\angle 69{\cdot}4° \text{ A}$$

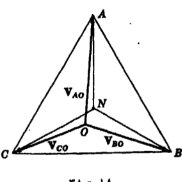
ويمر فى المعاوقة $\mathbf{Z}_A = 10 + j0$ ohms التيار $\mathbf{I}_A = 12\angle 90°$ A . القدرة فى حمل هذا الطور هو $P_A = (12)^2(10) = 1440$ W. ويمر فى المعاوقة $\mathbf{Z}_B = 15\angle 30° = 13 + j7{\cdot}5\ \Omega$ التيار $\mathbf{I}_B = 8\angle -60°$ A والقدرة المطاورة هى $P_B = (8)^2 13 = 832$ W. وبالمثل فإن $\mathbf{Z}_C = 10\angle -30° = 8{\cdot}66 - j5$ ohms تحتوى على تيار $\mathbf{I}_C = 12\angle -120°$ A والقدرة هى $P_C = (12)^2 8{\cdot}66 = 1247$ W

القدرة الكلية هى $P_T = P_A + P_B + P_C = 1440 + 832 + 1247 = 3519$ W

١٤ · ١٤ إذا وصلت معاوقات المسألة ١٤ – ١٣ بالمجموعة *ABC* لثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 208 V . فأوجد تيارات الأفرع والجهود عبر المعاوقات .



شكل ١٤ – ٣٧



١٤ - ٣٨

توضح دائرة الشكل ١٤ – ٣٧ جهدى الفرعين V_{AB} و V_{BC} وبالاختيار الموضح لتيارى الشبيكة I_1 و I_2 فإن الصيغة المصفوفية لمادلات تيارى الشبيكة هى

$$\begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ + 15\angle 30^\circ & -15\angle 30^\circ \\ -15\angle 30^\circ & 15\angle 30^\circ + 10\angle -30^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208\angle 120^\circ \\ 208\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن

$$I_1 = \frac{5210\angle 90^\circ}{367.5\angle 3.9^\circ} = 14.15\angle 86.1^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{3730\angle 56.6^\circ}{367.5\angle 3.9^\circ} = 10.15\angle 52.7^\circ \text{ A}$$

وتعطى تيارات الأفرع بدلالة I_1 و I_2 بفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الاحمال بالمعادلات

$$I_A = I_1 = 14.15\angle 86.1^\circ \text{ A}$$
$$I_B = I_2 - I_1 = 10.15\angle 52.7^\circ - 14.15\angle 86.1^\circ = 8.0\angle -49.5^\circ \text{ A}$$
$$I_C = -I_2 = 10.15\angle (52.7^\circ - 180^\circ) = 10.15\angle -127.3^\circ \text{ A}$$

والآن فإن الجهد على المعاوقات هو

$$V_{AO} = I_A Z_A = 14.15\angle 86.1^\circ (10\angle 0^\circ) = 141.5\angle 86.1^\circ \text{ V}$$
$$V_{BO} = I_B Z_B = 8.0\angle -49.5^\circ (15\angle 30^\circ) = 120\angle -19.5^\circ \text{ V}$$
$$V_{CO} = I_C Z_C = 10.15\angle -127.3^\circ (10\angle -30^\circ) = 101.5\angle -157.3^\circ \text{ V}$$

عند توصيل نهايات الجهود المطاورة الثلاثة V_{AO} و V_{BO} و V_{CO} بخطوط مستقيمة ينتج لدينا مثلث المتتابعة ABC . إذن النقطة N يمكن إضافتها إلى الشكل ١٤ – ٣٨ .

١٤ – ١٥ كرر حل المسألة ١٤ – ١٤ باستخدام طريقة إزاحة نقطة التعادل .

يحسب الجهد V_{ON} فى طريقة إزاحة نقطة التعادل من العلاقة

$$V_{ON} = \frac{V_{AN} Y_A + V_{BN} Y_B + V_{CN} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

لدينا من المسألة ١٤ – ١٤ $Y_A = 1/10 = 0.1 \text{ S}, Y_B = 1/(15\angle 30^\circ) = 0.0577 - j0.033 \text{ S}$

و $Y_C = 1/(10\angle -30^\circ) = 0.0866 + j0.050 \text{ S}$. إذن

$$Y_A + Y_B + Y_C = 0.244 + j0.0167 = 0.244\angle 3.93^\circ \text{ S}$$

$$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A = 120\angle 90^\circ (0.1) \qquad = 12\angle 90^\circ = \qquad j12 \quad A$$
$$\mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B = 120\angle -30^\circ (0.0667\angle -30^\circ) = 8.0\angle -60^\circ = 4.0 - j6.93 \text{ A}$$
$$\mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C = 120\angle -150^\circ (0.1\angle 30^\circ) \quad = 12\angle -120^\circ = -6.0 - j10.4 \text{ A}$$
$$\mathbf{V}_{AN}\mathbf{Y}_A + \mathbf{V}_{BN}\mathbf{Y}_B + \mathbf{V}_{CN}\mathbf{Y}_C = -2.0 - j5.33 = 5.69\angle 249.4^\circ \text{ A}$$

وعلى هذا فإن $\mathbf{V}_{ON} = (5.69\angle 249.4^\circ)/(0.244\angle 3.93^\circ) = 23.3\angle 245.5^\circ = -9.66 - j21.2$

ويمكن التعبير عن معاوقات الحمل بدلالة جهد الفرع المناظر بالنسبة للجهد المتعادل ، وذلك عن إزاحة الجهد المتعادل بمايلى :

$$\mathbf{V}_{AO} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle 90^\circ + (9.66 + j21.2) \quad = 141.2\angle 86.08^\circ \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{BO} = \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle -30^\circ + (9.66 + j21.2) \quad = 120\angle -18.9^\circ \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{CO} = \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NO} = 120\angle -150^\circ + (9.66 + j21.2) \quad = 102\angle 202.4^\circ \text{ V}$$

وللحصول على تيارات الأفرع فإننا نأخذ حاصل ضرب هذه الجهود فى المساحات المناظرة

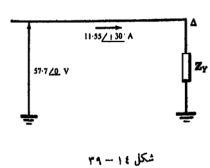
$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AO}\mathbf{Y}_A = 141.2\angle 86.08^\circ (0.1\angle 0^\circ) \quad = 14.12\angle 86.08^\circ \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BO}\mathbf{Y}_B = 120\angle -18.9^\circ (0.0667\angle -30^\circ) = 8.0\angle -48.9^\circ \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_{CO}\mathbf{Y}_C = 102\angle 202.4^\circ (0.1\angle 30^\circ) \quad = 10.2\angle 232.4^\circ \text{ or } 10.2\angle -127.6^\circ \text{ A}$$

والنتائج السابقة تطابق المسألة ١٤ – ١٤ وذلك فى حدود الدقة التى تسمح بها المسطرة الحاسبة .

١٤ – ١٦ إذا حصلنا على القراءتين 1154 V ، 577 W عند استخدام طريقة جهازى وأتميتر فى أحمال متزنة . فأوجد معاوقات الحمل المتصلة على شكل دلتا إذا كان جهد النظام 100 V .

لدينا فى حالة أحمال متزنة بثلاثة أطوار

$$\tan\theta = \sqrt{3}\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} = \pm\sqrt{3}\frac{1154 - 577}{1154 + 577} = \pm 0.577$$



شكل ١٤ – ٣٩

حيث $\theta = \pm 30^\circ$. (لعدم معرفتنا كل من المتتابعة وموضعى الجهازين فإنه لايمكن تحديد الإشارة ولذلك فإننا نكتب ±) .

القدرة الكلية هى

$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$$

$$I_L = \frac{P}{\sqrt{3}V_L\cos\theta} = \frac{1731}{\sqrt{3}(100)(0.866)} = 11.55 \text{ A}$$

نرسم دائرة الفرع الواحد المكافئة ونؤثر عليها بالجهد $(100/\sqrt{3})\angle 0 = 57.7\angle 0°$ V كما فى الشكل ١٤ – ٣٩ . وعلى هذا فإن معاوقات الشكل النجمى هى .

$$Z_Y = \frac{V}{I} = \frac{57.7\angle 0}{11.55\angle \mp 30°} = 5.0\angle \pm 30°\ \Omega$$

و

$$Z_\Delta = 3Z_Y = 15\angle \pm 30°\ \Omega$$

١٤ – ١٧ عند تطبيق طريقة جهازى واتميتر على نظام ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك بجهد 100 V ومتتابعة ABC كان قراءتا الجهازين عندما كانا موصلين فى الفرعين B و C هما $W_B = 836$ W و $W_C = 224$ W. أوجد المعاوقات المتزنة للشكل دلتا .

بما أن كلا من المتتابعة وموضعى الجهازين معروف فإنه يمكن تحديد إشارة θ . وعلى هذا فإن

$$\tan\theta = \sqrt{3}\frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{3}\frac{836 - 224}{836 + 224} = 1$$

أو $\theta = 45°$

بما أن $P = \sqrt{3}V_L I_L\cos\theta,\ I_L = \frac{P}{\sqrt{3}V_L\cos\theta} = \frac{1060}{\sqrt{3}(100)(0.707)} = 8.66$ A. إذن فالدائرة المكافئة ذات الفرع الواحد لها جهد $57.7\angle 0°$ V ومعاوقات الشكل النجمى هى

$Z_Y = V/I = (57.7\angle 0°)/(8.66\angle -45°) = 6.67\angle 45°\ \Omega$ ومعاوقات أحمال الشكل دلتا المطلوبة هى

$Z_\Delta = 3Z_Y = 20\angle 45°\ \Omega$.

١٤ – ١٨ وصلت وحدة تسخين 1500 W ذات ثلاثة أطوار وعامل القدرة لها يساوى الوحدة ومحرك تأثيرى 5hp كفاءة أقصى تحمل له 80 % وعامل القدرة له 0.85% بنظام واحد ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 208 V . أوجد قيمة تيار الفرع لمعدل عطاء من المحرك قيمته 5hp .

بما أن 746 W = 1 hp, فإن عطاء المحرك (5 hp)(746 W/hp) = 3730 W. إذن القدرة الداخلة للمحرك هى $3730/0.80 = 4662$ W

وحيث أن المحرك هو حمل متزن بثلاثة أطوار ، إذن

$$P = \sqrt{3}V_L I_L\cos\theta,\ 4662 = \sqrt{3}(208 I_L)(0.85),\ I_L = 15.25\text{ A}$$

التيار المطاور فى دائرة الفرع الواحد المكافئة لاحق للجهد بزاوية θ حيث $\theta = \cos^{-1}0.85 = 31.7°$

إذن تيار الفرع للمحرك هو $I_L = 15.25\angle -31.7°$ A.

لدينا الآن لحمل التسخين $P = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta$ where $\theta = 0°$

حيث $\theta = 0°$ وبالتعويض نجد أن

$1500 = \sqrt{3}(208) I_L$, $I_L = 4.16$ A, $\mathbf{I}_L = 4.16\angle 0°$ A

والتيار الكلى للفرع هو المجموع المطاور لتيارى المحرك وحمل التسخين :

$\mathbf{I}_L = 15.25\angle -31.7° + 4.17\angle 0° = 18.9\angle -25.1°$ A

وعلى هذا فإن التيار فى كل فرع هو 18.9 A لمعدل عطاء 5 hp من المحرك التأثيرى .

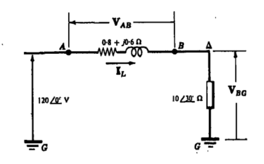
تيار الفرع

$120\angle 0°$ V

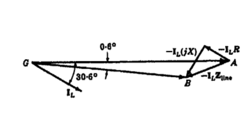
حمل المحرك حمل التسخين

شكل ١٤ – ٤٠

١٤ – ١٩ إذا وصلت ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منهما $30\angle 30°\ \Omega$ على شكل دلتا بنظام ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 208 V وذلك عن طريق معاوقات قيمتها $0.8 + j0.6\ \Omega$ فأوجد قيمة جهد الفرع عند كل حمل .



شكل ١٤ – ٤١



شكل ١٤ – ٤٢

الدائرة موضحة فى الشكل ١٤ – ٤١ مع شكل نجمى ذى معاوقة مكافئة قدرها $^1/_3 Z_\Delta$ أو $10\angle 30°\ \Omega$ ومعاوقة الفرع متصلة على التوالى مع الحمل ، أى أن

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_{line} + \mathbf{Z}_{load} = 0.8 + j0.6 + 8.66 + j5.0 = 9.46 + j5.6 = 11.0\angle 30.6°\ \Omega$$

إذن

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{120\angle 0°}{11.0\angle 30.6°} = 10.9\angle -30.6°\ \text{A}$$

وجهد الحمل هو

$$\mathbf{V}_{BG} = \mathbf{I}_L \mathbf{Z}_{load} = 10.9\angle -30.6°\,(10\angle 30°) = 109\angle -0.6°\ \text{V}$$

وجهد الفرع المطلوب هو

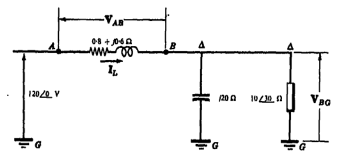
$$V_L = \sqrt{3}(109) = 189\ \text{V}$$

وعلى ذلك فإن جهد النظام 208 V يهبط إلى 189 V على الحمل نتيجة لوجود معاوقة فى الفرع .

الشكل ١٤ – ٤٢ يوضح الرسم المطاور وفيه الهبوط فى جهد الفرع هو

$$V_{AG} = V_{AB} + V_{BG}, \quad V_{AB} = I_L Z_{line} = (10{\cdot}9\angle -30{\cdot}6^\circ)(0{\cdot}8 + j0{\cdot}6) = 10{\cdot}9\angle 6{\cdot}3^\circ \text{ V}$$

١٤ – ٢٠ أوجد فى المسألة ١٤ – ١٩ جهد الفرع عند الحمل وذلك عند توصيل مجموعة من المكثفات ممانعاتها $-j60\Omega$ على التوازى مع الاحمال .



شكل ١٤ – ٤٣

فى دائرة الفرع الواحد المكافئة الموضحة فى الشكل ١٤ – ٤٣ يتصل كل من $-j20\,\Omega$ و $10\angle 30^\circ\Omega$ على التوازى .

$$Z_p = \frac{10\angle 30^\circ(-j20)}{(8{\cdot}66 + j5) - j20} = 11{\cdot}55\angle 0^\circ\ \Omega$$

والمعاوقة Z_p متصلة على التوالى مع معاوقة الفرع . إذن

$$Z_{eq} = Z_{line} + Z_p = (0{\cdot}8 + j0{\cdot}6) + (11{\cdot}55\angle 0^\circ) = 12{\cdot}35\angle 2{\cdot}78^\circ\ \Omega$$

والآن تيار الفرع هو

$$I_L = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{120\angle 0^\circ}{12{\cdot}35\angle 2{\cdot}78^\circ} = 9{\cdot}73\angle -2{\cdot}78^\circ \text{ A}$$

، الجهد على الحمل هو

$$V_{BG} = I_L Z_p = (9{\cdot}73\angle -2{\cdot}78)(11{\cdot}55\angle 0) = 112\angle -2{\cdot}78 \text{ V}$$

وجهد الفرع المناظر هو $V_L = \sqrt{3}(112) = 194$ volts

وكما فى الفصل السابع فإننا نلاحظ أن عامل القدرة قد تحسن بتوصيل مكثفات على التوازى مع الحمل وينتج عن هذا هبوط فى الجهد على معاوقة الفرع . وعلى هذا فإنه فى هذه المسألة هبط جهد النظام من 208 V إلى 194 V بدلا من 189 V كما فى المسألة ١٤ – ١٩ .

مسائل اضافية

١٤ – ٢١ وصلت ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منها $10\angle 53.1°\,\Omega$ بالمتتابعة CBA لنظام ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 240 V . أوجد تيارات الأفرع .

الجواب : $41.6\angle 96.9°$ A ، $41.6\angle -143.1°$ A, $41.6\angle -23.1°$ A

١٤ – ٢٢ وصلت ثلاثة معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منها $15.9\angle 70°\,\Omega$ بالمتتابعة CBA لنظام ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 100 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

الجواب : $10.9\angle -160°$ A, $10.9\angle -40°$ A, $10.9\angle 80°$ A; 646 W

١٤ – ٢٣ وصلت ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منها $42\angle -35°\,\Omega$ بالمتتابعة ABC لنظام ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 350 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

الجواب : $14.4\angle 125°$ A, $14.4\angle 5°$ A, $14.4\angle -115°$ A, 7130 W

١٤ – ٢٤ وصل حمل متزن على شكل النجمة معاوقاته $6\angle 45°\,\Omega$ بالمتتابعة CBA لنظام ذى ثلاثة أطوار – أربعة أسلاك جهد 208 V . أوجد تيارات الأفرع بما فى ذلك تيار نقطة التعادل .

الجواب : $20\angle -135°$ A, $20\angle -15°$ A, $20\angle 105°$ A وصفر

١٤ – ٢٥ وصل حمل متزن على شكل النجمة معاوقاته $65\angle -20°\,\Omega$ بالمتتابعة CBA نظام ذو ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 480 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

الجواب : $4.26\angle -70°$ A, $4.26\angle 50°$ A, $4.26\angle 170°$ A; 3320 W

١٤ – ٢٦ وصل محرك تأثيرى 50 hp وكفاءة تحميله الكلية 85% وعامل القدرة له 0.8 بنظام ذى ثلاثة أطوار وجهد 480 V . أوجد معاوقات النجمة المكافئة التى يمكن إبدال المحرك بها .

الجواب : $4.2\angle 36.9°\,\Omega$

١٤ – ٢٧ وصل محرك تأثيرى 25 hp ذو ثلاثة أطوار كفاءة تحميله الكلية 82% وعامل القدرة له 0.75 بنظام جهد 208 V . أوجد معاوقات دلتا المكافئة التى يمكن إبدال المحرك بها ثم أوجد القراءتين اللتين تحصل عليهما باستخدام طريقة جهازى واتميتر

الجواب : $4.28\angle 41.4°\,\Omega$; 5.58 kW, 17.15 kW

١٤ – ٢٨ وصلت ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منهما $9\angle -30°\,\Omega$ ، وكذلك ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل النجمة قيمة كل منهما $5\angle 45°\,\Omega$ ، بالمتتابعة ABC لنظام ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 480 V . أوجد قيمة الفرع والقدرة الكلية .

الجواب : 119.2 A و 99 kW

١٤ – ٢٩ وصل حمل متزن على شكل دلتا معاوقاته $27\angle -25°\,\Omega$ وحمل آخر متزن على شكل نجمة ومعاوقاته $10\angle -30°\,\Omega$ بالمتتابعة ABC لنظام ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 208 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة فى كل حمل .

الجواب : $25.3\angle 117.4°$ A, $25.3\angle -2.6°$ A, $25.3\angle -122.6°$ A; 4340 W و 3740 W

١٤ - ٣٠ نظام ذو ثلاثة أطوار بجهد 100 V يغذى حمل متزن على شكل دالتا معاوقاته $10\angle{-36.9^\circ}\ \Omega$. وكذلك حمل متزن على شكل النجمة معاوقاته $5\angle{53.1^\circ}\ \Omega$. أوجد القدرة فى كل حمل وقيمة التيار الفرعى الكلى .

الجواب : 2400 W, 1200 W; 20.8 A

١٤ - ٣١ وصل حملين متزنين كل منهما على شكل دلتا ومعاوقاتهما $20\angle{-60^\circ}\ \Omega$ و $18\angle{45^\circ}\ \Omega$ على الترتيب بنظام ذى ثلاثة أطوار بجهد 150 V . أوجد القدرة فى كل حمل . الجواب : 1690 W و 2650 W

١٤ - ٣٢ نظام ذو ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 173.2 V وصلت بمجموعة *CBA* بثلاثة أحمال متزنة أشكال توصيلها ومعاوقاتها كما يلى : شكل نجمة معاوقاته $10\angle{0^\circ}\ \Omega$ وشكل دلتا معاوقاته $24\angle{90^\circ}\ \Omega$ وشكل دلتا ثالث معاوقاته مجهولة . أوجد هذه المعاوقة علماً بأن تيار الفرع *A* هو $32.7\angle{-138.1^\circ}$ A وذلك بفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الحمل . الجواب : $18\angle{45^\circ}\ \Omega$

١٤ - ٣٣ إذا كانت قراءتى جهازى واتميتر المتصلين فى الفرعين *A* و *B* لنظام *CBA* جهده 120 V هما 1500 W و 500 W على الترتيب . فأوجد معاوقة الحمل المتزن الذى على شكل دلتا الجواب : $16.3\angle{-41^\circ}\ \Omega$

١٤ - ٣٤ إذا كانت قراءتى جهازى واتميتر المتصلين فى الفرعين *A* و *B* لنظام *ABC* جهده 173.2 V هما 301 W — و 1327 W + على الترتيب . فأوجد معاوقة الحمل المتزن ذى شكل نجمة . الجواب : $10\angle{-70^\circ}\ \Omega$

١٤ - ٣٥ أوجد قراءتى جهازى الواتميتر المستخدمين فى نظام ذى ثلاثة أسلاك وجهده 240 V ويؤثر على حمل متزن على شكل دلتا معاوقاته $20\angle{80^\circ}\ \Omega$. الجواب : 3210 W و 1710 W —

١٤ - ٣٦ وصل جهازا واتميتر فى الفرعين *B* و *C* للنظام *CBA* – ثلاثة أسلاك وجهد 173.2 V الذى يؤثر على حمل متزن . أوجد قراءتى الجهازين علماً بأن تيار الفرع هو $I_A = 32.7\angle{-41.9^\circ}$ A

الجواب : 5370 W و 1170 W

١٤ - ٣٧ يغذى النظام *CBA* الذى جهده 100V حمل متزن ومتصل فيه جهازا واتميتر فى الفرعين *A* و *B* فإذا كان $I_B = 10.9\angle{-40^\circ}$ A هو تيار الفرع *B* فأوجد قراءتى الواتميتر .

الجواب : 835 W ، 189 W —

١٤ - ٣٨ وصل حمل على شكل دلتا معاوقاته $Z_{AB} = 10\angle{30^\circ}$ ohms و $Z_{BC} = 25\angle{0^\circ}$ ohms و $Z_{CA} = 20\angle{-30^\circ}$ ohms بالنظام *ABC* ذى الثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 500 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

الجواب : $75\angle{90^\circ}$ A, $53.9\angle{-68.2^\circ}$ A, $32\angle{231.3^\circ}$ A; 42.4 kW

١٤ - ٣٩ يتغذى حمل على شكل دلتا معاوقاته $Z_{AB} = 5\angle{0^\circ}$ ohms و $Z_{BC} = 4\angle{30^\circ}$ ohms و $Z_{CA} = 6\angle{-15^\circ}$ ohms من النظام *ABC* ذى الثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 208 V .

أوجد تيارات الأفرع وقراءتى جهازى الواتميتر فى الفرعين *A* و *C* .

الجواب : $70.5\angle{99.65^\circ}$ A, $90.5\angle{-43.3^\circ}$ A, $54.6\angle{187.9^\circ}$ A; 13.7 kW, 11.25 kW

١٤ - ٤٠ يتغذى حمل على شكل النجمة معاوقاته $Z_A = 3 + j0$ ohms و $Z_B = 2 + j3$ ohms و $Z_C = 2 - j1$ ohms من النظام *CBA* ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 100 V . أوجد تيارات الأفرع بما فى ذلك تيار الفرع المتعادل بفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الحمل .

الجواب : $19.25\angle{-90^\circ}$ A, $16\angle{-26.3^\circ}$ A, $25.8\angle{176.6^\circ}$ A, $27.3\angle{65.3^\circ}$ A

١٤ – ٤١ حمل على شكل النجمة ومعاوقاته $Z_A = 12\angle 45^\circ$ ohms و $Z_B = 10\angle 30^\circ$ ohms و $Z_C = 8\angle 0^\circ$ ohms متصل بنظام جهده 208 V وبه أربعة أسلاك . أوجد القدرة الكلية .

الجواب : 3898 W

١٤ – ٤٢ إذا كانت تيارات الأفرع فى النظام ABC ذى الثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 220 V هى $I_A = 43.5\angle 116.6^\circ$ A و $I_B = 43.3\angle -48^\circ$ A و $I_C = 11.39\angle 218^\circ$ A فأوجد قراءتى جهازى الواتميتر فى الأفرع (أ) A و B ، (ب) B و C ، (جـ) A و C .

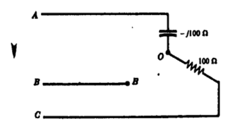
الجواب : (أ) 6370 W و 5270 W ، (ب) 2330 W و 9310 W ، (جـ) 1980 W ، 9550 W

١٤ – ٤٣ إذا كانت تيارات الأفرع فى النظام ABC ذى الثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 440 V هى $I_A = 19.72\angle 90^\circ$ A و $I_B = 57.3\angle -9.9^\circ$ A و $I_C = 57.3\angle 189.9^\circ$ A فأوجد قراءتى جهازى الواتميتر فى الفرعين (أ) A و B ، (ب) B و C .

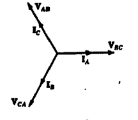
الجواب (أ) : 7.52 kW و 24.8 kW (ب) 16.15 kW و 16.15 kW

١٤ – ٤٤ يوضح الشكل المطاور ١٤ – ٤٤ تيارات الأفرع وجهود الأفرع بالنسبة لبعضها وذلك للنظام ABC ذى الثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 346 V . فإذا كان تيار الفرع يساوى 10 A . فأوجد معاوقة الحمل الذى على شكل النجمة والمتصل بهذا النظام .

الجواب : $20\angle 90^\circ\ \Omega$



شكل ١٤ – ٤٥



شكل ١٤ – ٤٤

١٤ – ٤٥ توضح دائرة الشكل ١٤ – ٤٥ وجود معاوقة لانهائية (دائرة مفتوحة) متصلة فى الطور B للحمل الذى على شكل نجمة . أوجد الجهد المطاور V_{OB} علماً بأن جهد النظام ABC هو 208 V الجواب : $284\angle 150^\circ$ V

١٤ – ٤٦ حمل على شكل نجمة متصل بنظام ذى ثلاثة أطوار جهده المطاور 400 V فإذا كان الحد الأقصى للتيار فى كل ملف هو 35 A ، (أ) فماهو معدل القدرة kVA لهذه الآلة ؟ (ب) إذا كان النظام يمد الأفرع بتيار 20 A بمعامل قدرة 0.65 فما هى kVA لكل طور فى الآلة ؟ . الجواب : 26.6 kVA و 5.08 kVA

١٤ – ٤٧ إذا كانت قيمة التيار فى مجموع التيارات المتزنة فى الشكل المطاور ١٤ – ٤٦ هى 10 A وجهد الفرع هو 120 V . فأوجد القدرة الكلية والقدرة الظاهرية VA المناظرتين .

الجواب : 1.47 kW و 2.08 kVA

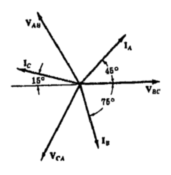
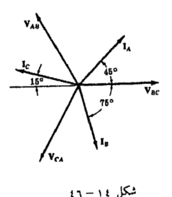
١٤ – ٤٨ وصل حمل على شكل نجمة معاوقاته $Z_A = 10\angle 0°$ ohms

و $Z_B = 10\angle 60°$ ohms و $Z_C = 10\angle -60°$ ohms

بنظام ABC ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 200 V ،

أوجد الجهود عبر معاوقات الحمل V_{AO} و V_{BO} و V_{CO}

الجواب : $173\angle 90°$ V, $100\angle 0°$ V, $100\angle 180°$ V

شكل ١٤ – ٤٦

١٤ – ٤٩ وصل حمل على شكل النجمة معاوقاته $Z_A = 10\angle -60°$ ohms

و $Z_B = 10\angle 0°$ ohms و $Z_C = 10\angle 60°$ ohms

بنظام CBA ذى ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 208 V

أوجد الجهود عبر معاوقات الحمل .

الجواب : $208\angle -120°$ V, 0, $208\angle 180°$ V

١٤ – ٥٠ يغذى نظام ABC ذو ثلاثة أسلاك وجهد 480 V حمل على شكل نجمة معاوقاته $Z_A = 10\angle 0°\ \Omega$

و $Z_B = 5\angle -30°\ \Omega$ و $Z_C = 5\angle 30°\ \Omega$. أوجد قراءتى الواتميتر فى الفرعين A و B .

الجواب : 8.92 kW و 29.6 kW

١٤ – ٥١ يغذى نظام CBA ذو ثلاثة أسلاك وجهد 100V حمل على شكل نجمة معاوقاته $Z_A = 3 + j0$ ohms

و $Z_B = 2 + j3$ ohms و $Z_C = 2 - j1$ ohms. أوجد الجهود عبر معاوقات الحمل .

الجواب . $31{\cdot}6\angle -67{\cdot}9°$ V, $84{\cdot}3\angle 42{\cdot}7°$ V, $68{\cdot}6\angle 123{\cdot}8°$ V

١٤ – ٥٢ يتصل نظام ذو ثلاثة أطوار – ثلاثة أسلاك وجهد 240 V بثلاث معوقات متساوية على شكل نجمة قيمة كل منها $15\angle 60°\ \Omega$ فإذا كانت معاوقة كل فرع بين المصدر والحمل هى $2+j1\Omega$ فأوجد قيمة جهد الفرع عند الحمل .

الجواب : 213 V

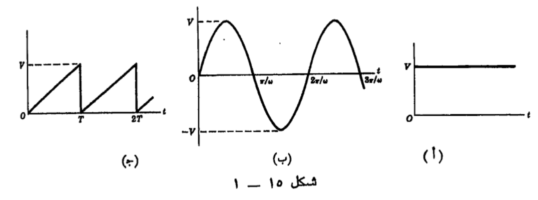
١٤ – ٥٣ كرر المسألة ١٤ – ٥٢ مع اعتبار أن معاوقات الحمل نجمية الشكل قيمة كل منها $15\angle -60°\ \Omega$ ثم قارن بين النتيجتين برسم الأشكال المطاورة للجهود . الجواب : 235 V

الفصل الخامس عشر

طريقة فورير لتحليل الشكل الموجى

مقدمة :

اعتبرنا فى الدوائر التى سبقت دراستها حالة الاستجابة المستقرة الناتجة عن إثارة لها شكل ثابت أو شكل جيبى . وفى مثل هذه الحالات يطبق تعبير واحد للدوال المؤثرة عند جميع قيم الزمن ، مثال ذلك : لدينا المعادلة ، ثابت $= v$ ، فى حالة التيار المستمر $v = V_{max} \sin \omega t$ فى حالة التيار المتردد وذلك لجميع قيم t كما فى الشكل ١٥-١ (أ) ، (ب) .



شكل ١٥ — ١

فى الشكل ١٥-١ (جـ) الشكل الموجى الدورى المسمى بسن المنشار وهو مثال لذلك النوع الموجى الذى يمكن وصفه بدالة وحيدة فى فترة ما . وعلى ذلك فإن سن المنشار يعبر عنه بالدالة $f(t) = (V/T)t$ فى الفترة الزمنية $0 < t < T$ وبالدالة $f(t) = (V/T)(t - T)$ فى الفترة الزمنية $T < t < 2T$. وبالرغم من أن هذه المعادلات تصف الشكل الموجى بطريقة مرضية تدريجيا فإنها لا تسمح بتعيين استجابة الدائرة . والآن إذا أمكن التعبير عن الدالة الدورية بمجموع محدود أو غير محدود لدوال جيبية ، فإنه يمكن تعيين استجابات الشبكات الكهربائية الخطية لإثارة جيبية وذلك بتطبيق نظرية التراكب . وطريقة فورير تعطينا حل مثل هذه المسائل .

متسلسلة فورير المثلثية :

أى شكل موجى دورى يحقق المعادلة $f(t) = f(t + T)$ يمكن التعبير عنه بمتسلسلة فورير طالما أن :

(١) إذا كان الشكل الموجى غير متصل فإن عدد الانقطاعات فى الزمن الدورى T محدود .

(٢) له قيمة متوسطة محدودة فى الزمن الدورى T .

(٣) له عدد محدود من القيم العظمى الموجبة والسالبة .

عندما تتحقق هذه الشروط المسماة بشروط دريشليت فإن متسلسلة فورير تكون موجودة ويمكن كتابتها على الشكل المثلثى .

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \cdots$$
$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \cdots \qquad (١)$$

وتعين معاملات فورير الـ a والـ b لشكل موجى معطى عن طريق حساب التكاملات . ونحصل على معامل جيب التمام فى التكامل بضرب طرفى المعادلة (١) فى $\cos n\omega t$ ثم إجراء التكامل على زمن دورى كامل . والزمن الدورى الأساسى $2\pi/\omega$ هو زمن المتسلسلة الدورى حيث أن كل حد فى المتسلسلة له تردد عبارة عن مضاعفات صحيحة التردد الأساسى .

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \tfrac{1}{2}a_0 \cos n\omega t \, dt + \int_0^{2\pi/\omega} a_1 \cos \omega t \cos n\omega t \, dt + \cdots$$
$$+ \int_0^{2\pi/\omega} a_n \cos^2 n\omega t \, dt + \cdots + \int_0^{2\pi/\omega} b_1 \sin \omega t \cos n\omega t \, dt$$
$$+ \int_0^{2\pi/\omega} b_2 \sin 2\omega t \cos n\omega t \, dt + \cdots \qquad (٢)$$

وجميع التكاملات المحدودة التى فى الطرف الأيمن فى المعادلة (٢) تساوى صفرا ما عدا $\int_0^{2\pi/\omega} a_n \cos^2 n\omega t \, dt$ الذى قيمته $\frac{\pi}{\omega} a_n$ إذن

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T} f(t) \cos n\omega t \, dt \qquad (٣)$$

ونحصل على معاملات الجيب فى التكامل بضرب طرفى المعادلة (١) فى $\sin n\omega t$ ثم التكامل كما سبق .

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \sin n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T} f(t) \sin n\omega t \, dt \qquad (٤)$$

وهناك شكل آخر للتكاملات المحسوبة والتى لها متغير ωt يناظر دورة 2π radians وهو

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n\omega t \, d(\omega t) \qquad (٥)$$

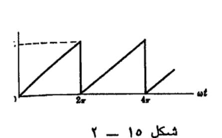
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\omega t \, d(\omega t) \qquad (٦)$$

ويجب أن تحتوى حدود التكامل على دورة كاملة وليس من الضرورى أن تكون من 0 إلى T أو من 0 إلى 2π .. وعلى ذلك فإنه يمكن إجراء التكامل من $-T/2$ إلى $T/2$ أو من $-\pi$ إلى $+\pi$ أو على دورة كاملة تبسط التكامل . ونحصل على الثابت a_0 من المعادلة (٣) أو المعادلة (٥) بوضع $n = 0$ ، وحيث أن $\tfrac{1}{2}a_0$ هو القيمة المتوسطة للدالة فإنه يمكن تعينها عادة بفحص الشكل الموجى . ومتسلسلة المعاملات التى حصلنا عليها من حساب التكاملات تتقارب بانتظام إلى شكل الدالة عند جميع النقط المتصلة وتتقارب إلى القيمة المتوسطة عند النقط غير المتصلة .

مثال ١ :

أوجد متسلسلة فورير للشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥ — ٢ .

الشكل الموجى متصل فى الفترة $0 < \omega t < 2\pi$ ويعطى بالمعادلة $f(t) = (10/2\pi)\omega t$، وهى غير متصلة عند $\omega t = n2\pi$ حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$. إن شروط دريشليت متحققة وعلى ذلك فإن معاملات فورير يمكن حسابها باستخدام المعادلتين (٥) و (٦) وبالفحص نجد أن القيمة المتوسطة للدالة هى 5 وعلى ذلك فإن $\frac{1}{2}a_0 = 5$. والآن باستخدام المعادلة (٥) نجد أن .



شكل ١٥ — ٢

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t \cos n\omega t \, d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2}\left[\frac{\omega t}{n}\sin n\omega t + \frac{1}{n^2}\cos n\omega t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{10}{2\pi^2 n^2}(\cos n2\pi - \cos 0) = 0$$

وذلك لجميع قيم n الصحيحة .

وعلى هذا فإن المتسلسلة لا تحتوى على حدود جيب تمام . وباستخدام المعادلة (٦) نحصل على

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t \sin n\omega t \, d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2}\left[-\frac{\omega t}{n}\cos n\omega t + \frac{1}{n^2}\sin n\omega t\right]_0^{2\pi} = -\frac{10}{\pi n}$$

وباستخدام معاملات حدود الجيب والحد المتوسط فإن المتسلسلة هى

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi}\sin \omega t - \frac{10}{2\pi}\sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi}\sin 3\omega t - \cdots = 5 - \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\omega t}{n}$$

يمكن تجميع حدود الجيب والجيب تمام التى لها نفس التردد فى حد جيبى أو حد جيب تمام له زاوية طور . وينتج لدينا شكلان آخران للمتسلسلة :

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum c_n \cos(n\omega t - \theta_n) \quad (٧)$$

و

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum c_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (٨)$$

حيث $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \theta_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$ و c_n . $\varphi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$ فى المعادلتين (٧) و (٨) هما سعة التردد وزاوية طور التردد (θ_n أو φ_n) .

متسلسلة فورير الأسية :

إذا عبرنا عن كل حد من حدود الجيب تمام فى المتسلسلة ذات النسب المثلثية بقيمته الأسية المكافئة ينتج متسلسلة حدودها أسية على الشكل .

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right) + a_2\left(\frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2}\right) + \cdots$$
$$+ b_1\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) + b_2\left(\frac{e^{j2\omega t} - e^{-j2\omega t}}{2j}\right) + \cdots \quad (٩)$$

وبإعادة ترتيب الحدود

$$f(t) = \cdots + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{b_2}{2j}\right) e^{-j2\omega t} + \left(\frac{a_1}{2} - \frac{b_1}{2j}\right) e^{-j\omega t} + \frac{a_0}{2} + \left(\frac{a_1}{2} + \frac{b_1}{2j}\right) e^{j\omega t} + \left(\frac{a_2}{2} + \frac{b_2}{2j}\right) e^{j2\omega t} + \cdots \qquad (١٠)$$

ونعرف الآن الثابت المركب $\mathbf{A}$ بالمعادلات

$$A_0 = \tfrac{1}{2}a_0, \quad \mathbf{A}_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad \mathbf{A}_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n) \qquad (١١)$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (١٠) على الصورة

$$f(t) = \{\cdots + \mathbf{A}_{-2}e^{-j2\omega t} + \mathbf{A}_{-1}e^{-j\omega t} + A_0 + \mathbf{A}_1 e^{j\omega t} + \mathbf{A}_2 e^{j2\omega t} + \cdots\} \qquad (١٢)$$

ولإجراء التكامل للحصول على معاملات $\mathbf{A}_n$ فإننا نضرب طرفى المعادلة (١٢) فى $e^{-jn\omega t}$ ثم نكامل على دورة كاملة :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) = \cdots + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_{-2}\, e^{-j2\omega t} e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_{-1}\, e^{-j\omega t} e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \int_0^{2\pi} A_0\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_1\, e^{j\omega t} e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \cdots + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_n\, e^{jn\omega t} e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) + \cdots \qquad (١٣)$$

وجميع التكاملات التى فى الطرف الأيمن فى المعادلة (١٣) تساوى صفرا ما عدا $\int_0^{2\pi} \mathbf{A}_n\, d(\omega t)$ الذى قيمته $2\pi\mathbf{A}_n$ إذن

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) \qquad (١٤)$$

أو مع اعتبار t كمتغير

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{T} \int_0^{T} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt$$

وكما فى حساب التكاملات للحصول على a_n و b_n ، فإن حدود التكامل فى المعادلة (١٤) يجب أن تعطى أى دورة كاملة تسهل عملية التكامل ولا يشترط أن تكون من 0 إلى 2π أو من 0 إلى T .

يمكن إشتقاق معاملات المتسلسلة ذات النسب المثلثية من معاملات المتسلسلة كما يلى :

أولا نضيف ثم نطرح التعبيرات الدالة على $\mathbf{A}_n$ و $\mathbf{A}_{-n}$ من المعادلة (١١) . إذن

$$\mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n + a_n + jb_n)$$

ومنها نجد أن

$$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} \qquad (١٥)$$

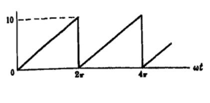
و

$$\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n - a_n - jb_n)$$

أو

$$b_n = j(\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}) \qquad (١٦)$$

مثال ٢ :



شكل ١٥ — ٣

أوجد متسلسلة فورير الأسية للشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥—٣ . استخدم معاملات هذه المتسلسلة الأسية لتحصل على a_n ، b_n للمتسلسلة ذات النسب المثلثية ثم قارن بالمثال ١ .

تعطى الدالة فى الفترة $0 < \omega t < 2\pi$ بالمعادلة $f(t) = (10/2\pi)\omega t$. وبالفحص نلاحظ أن القيمة المتوسطة للدالة هى 5 . وبالتعويض عن $f(t)$ فى المعادلة (١٤) نحصل على المعاملات $\mathbf{A}_n$.

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{10}{2\pi}\right)\omega t\, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t) = \frac{10}{(2\pi)^2}\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_0^{2\pi} = j\frac{10}{2\pi n}$$

وبادخال المعاملات $\mathbf{A}_n$ فى المعادلة (١٢) ، تكون متسلسلة فورير الأسية للشكل الموجى المعطى هى

$$f(t) = \cdots - j\frac{10}{4\pi}e^{-j2\omega t} - j\frac{10}{2\pi}e^{-j\omega t} + 5 + j\frac{10}{2\pi}e^{j\omega t} + j\frac{10}{4\pi}e^{j2\omega t} + \cdots \qquad (١٧)$$

معاملات حدود الجيب تمام فى المتسلسلة المثلثية هى

$$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = j\frac{10}{2\pi n} + j\frac{10}{2\pi(-n)} = 0$$

ومعاملات حدود الجيب هى

$$b_n = j(\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}) = j\left(j\frac{10}{2\pi n} - j\frac{10}{2\pi(-n)}\right) = -\frac{10}{\pi n}$$

وعلى ذلك فإن المتسلسلة ذات النسب المثلثية لا تحتوى على حدود جيب تمام لأن $a_n = 0$ لجميع قيم n ومعاملات الحد الجيبى هى $-10/(\pi n)$. والقيمة المتوسطة هى 5 والمتسلسلة هى

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi}\sin\omega t - \frac{10}{2\pi}\sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi}\sin 3\omega t - \cdots$$

وهى كما فى المثال ١ .

تماثل الشكل الموجى :

تحتوى المتسلسلة التى حصلنا عليها فى المثال ١ على حدود جيبية بالإضافة إلى حد ثابت . وهناك أشكال موجية تحتوى فقط على حدود جيب تمام ، وفى بعض الأحيان تحتوى المتسلسلة على ترددات فردية سواء كانت تحتوى المتسلسلة على حدود جيبية أو جيب تمامية أو الإثنين معا . وهذا نتيجة لبعض أنواع التماثل الذى يتبع الشكل الموجى . وبمعرفة هذا التماثل فإنه يمكن اختصار الحسابات اللازمة لتعيين المتسلسلة . ولهذا الغرض فإنه من المهم كتابة التعريفات التالية :

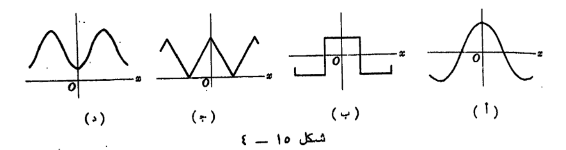
١ — يقال إن الدالة $f(x)$ زوجية إذا كان $f(x) = f(-x)$.

الدالة $f(x) = 2 + x^2 + x^4$ هى مثال الدوال الزوجية وذلك لتساوى قيم الدالة عند x و $-x$. الجيب تمام دالة زوجية حيث يمكن التعبير عنها بمتسلسلة على الشكل .

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

مجموع دالتين زوجيتين أو أكثر هو دالة زوجية ، وبإضافة حد ثابت فإن زوجية الدالة لا تزال قائمة .

يوضح الشكل ١٥–٤ أشكال موجبة لدوال زوجية وهى متماثلة بالنسبة للمحور الرأسى .



شكل ١٥ — ٤

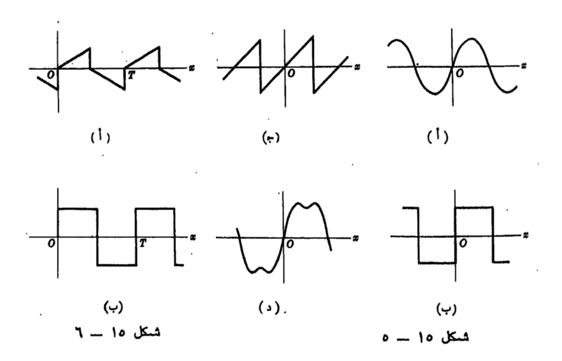
٢ – يقال إن الدالة $f(x)$ فردية إذاكان $f(x) = -f(-x)$.

الدالة x^5 ، x^3 ، x ، $f(x)$ هى مثال للدوال الفردية وذلك لأن قيم الدالة عند x ، $-x$ لها إشارات معاكسة .
والجيب دالة فردية حيث يمكن التعبير عنه على الشكل

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

مجموع دالتين فرديتين أو أكثر هو دالة فردية ، ولكن إضافة حد ثابت يزيل فردية الدالة حيث $f(x)$ لا تظل مساوية $-f(-x)$. إن حاصل ضرب دالتين فرديتين هو دالة زوجية .

يمثل الشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥–٥ دوال فردية .



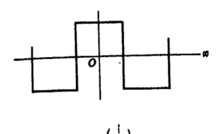
شكل ١٥ — ٦

شكل ١٥ — ٥

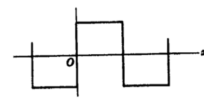
٣ – يقال إن الدالة الدورية $f(x)$ لها تماثل نصف موجى إذا كان $f(x) = -f(x + T/2)$ حيث T هو زمن الدورة . يوضح الشكل ١٥ – ٦ شكلين موجيين لهما تماثل نصف موجى .

وبمعرفة نوع تماثل الشكل الموجى يمكن الوصول إلى الاستنتاجات التالية :

إذا كان الشكل الموجى زوجيا فإن جميع حدود المتسلسلة المناظرة له هى حدود جيب تمام مع احتمال وجود ثابت إذا كان الشكل الموجى قيمة متوسطة . وعلى ذلك فإننا لا نحتاج إلى حساب قيمة التكامل للحصول على المعاملات b_n حيث لا يوجد حدود جيبية . وإذا كان فرديا فإن المتسلسلة تحتوى على حدود جيبية فقط . والدالة يمكن أن تكون فردية فقط بعد حذف الثابت ، وفى هذه الحالة فإن متسلسلة فورير المناظرة لها تحتوى على هذا الثابت بالإضافة إلى متسلسلة من الحدود الجيبية . إذا كان الشكل الموجى تماثل نصف موجى فإنه يوجد فى المتسلسلة ترددات فردية فقط . وهذه المتسلسلة تحتوى على حدود جيبية وجيب تمامية ما لم تكن الدالة فردية أو زوجية . وفى أى حالة فإن كلا من a_n و b_n يساوى صفرا عندما $n = 2, 4, 6, \ldots$ وذلك لأى شكل موجى له تماثل نصف موجى .



(أ)

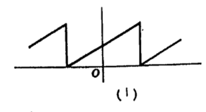


(ب)

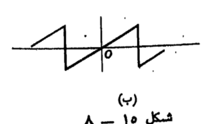
شكل ١٥ – ٧

بعض الأشكال الموجية يمكن أن تكون فردية أو زوجية على حسب موضع المحور الرأسى . والموجة المربعة الموضحة فى الشكل ١٥–٧ (أ) تحقق شرط الدالة الزوجية ، أى أن $f(x) = f(-x)$ وينتج عن إزاحة المحور الرأسى إلى الموضع الموضح فى الشكل ١٥–٧ (ب) دالة فردية حيث $f(x) = -f(-x)$. وإذا وضع المحور الرأسى عند أى نقطة غير النقطتين الموضحتين فى الشكل ١٥–٧ فإن الموجة المربعة تصبح لا فردية ولا زوجية – وتحتوى متسلسلتها فى هذه الحالة على حدود جيبية وجيب تمامية معا . وعلى ذلك فإنه فى تحليل الدوال الدورية يجب اختيار موضع مناسب للمحور الرأسى حتى ينتج لدينا دالة زوجية أو فردية وذلك طالما أن نوع الشكل الموجى يسمح بذلك .

إن إزاحة المحور الأفقى يمكن أن تبسط المتسلسلة التى تمثل الدالة . وكمثال على ذلك فإن الشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥–٨ (أ) لا يحقق شروط الدالة الفردية إلا إذا حذفنا القيمة المتوسطة كما هو موضح فى الشكل ١٥–٨ (ب) . وعلى هذا فإن متسلسلته تحتوى على حد ثابت بالإضافة إلى جميع الحدود الجيبية .



(ا)



(ب)

شكل ١٥ – ٨

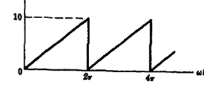
بما أن المتسلسلة الأسية المناظرة للجيب هى متسلسلة تخيلية تماماً والمتسلسلة الأسية المناظرة للجيب تمام هى متسلسلة حقيقية تماماً ، فإنه يمكن استخدام شروط التماثل السابقة لاختبار معاملات المتسلسلة الأسية . يحتوى الشكل الموجى الزوجى على حدود جيب تمامية فقط وعلى ذلك فإن متسلسلته المثلثية . وبالتالى معاملات فورير الأسية يجب أن تكون أعداد حقيقية تماماً . وبالمثل فإن الدوال الفردية التى تتكون متسلسلتها المثلثية من حدود جيبية تكون معاملات متسلسلتها الأسية تخيلية تماماً .

الطيف الخطى :

يسمى الرسم الذى يوضح كلا من السعات التوافقية فى الموجة بالطيف الخطى . وتتناقص الخطوط سريعاً للموجات التى تتقارب متسلسلتها بسرعة . والموجات غير المتصلة مثل سن المنشار والموجة المربعة لها أطياف تتناقص سعتها ببطء وذلك لأن متسلسلتها لها توافقيات عالية قوية . وعادة تكون الترددات العشرة الأولى قيم سعات ملحوظة بالمقارنة بالترددالأساسى . وعلى العكس فإنمتسلسلات الأشكال الموجية التى لايوجد بها عدم اتصال والتى تمثل عادة بخط سلس تتقارب بسرعة إلى الدالة وتحتاج فى هذه الحالة فقط إلى حدود قليلة لتمثيل الموجة . ويتضح هذا التقارب السريع من الطيف الخطى حيث تتناقص سعة الترددات بسرعة . وعلى ذلك فإن قيمة سعة التردد الخامس أو السادس تكون غير ملحوظة .

الترددات والطيف الخطى لأى موجة هما جزء من طبيعة الموجة نفسها لايتغيران مهما تكن طريقة التحليل . وبإزاحة نقطة الأصل نحصل على متسلسلة نسب مثلثية تختلف تماما فى ظاهرها ، أيضا تتغير كثير . معاملات المتسلسلة الأسية بازاحة نقطة الأصل ، ولكن يظهر دائماً نفس التردد فى المتسلسلة وكذلك تظل سعتها التى تعطى بالمعادلة $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ أو $c_n = |\mathbf{A}_n| + |\mathbf{A}_{-n}|$ ثابتة .

يوضح الشكل ١٥ – ٩ موجة سن المنشار فى المثال(١) وكذلك طيفها . وبما أنه يوجد حدود جيبية فقط فى المتسلسلة فإن سعة التردد C_n تعطى مباشرة من b_n .



الأزمنة الاساسية :

شكل ١٥ – ٩

يوضح الشكل ١٥ – ١٠ متسلسلة أسية ترددات حدودها $+n\omega$ و $-n\omega$ (أنظر المعادلة ١٧) وكذلك طيفها . والسعة الفعلية لتردد معين هو مجموع سعتين إحداهما عند $+n\omega$ والأخرى عند $-n\omega$. ونجد فى الطيف الموضح فى الشكل ١٥ – ١٠ خطوط سعتها $10/4\pi$ عند $n = -2$ و $n = +2$. وبجمعهما نحصل على $10/2\pi$ وهى السعة الفعلية لهذا التردد وهى تتفق مع الطيف الموضح فى الشكل ١٥ – ٩ .

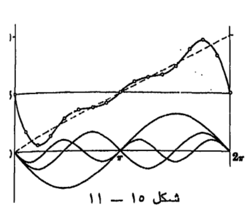
شكل ١٥ – ١٠

تركيب الشكل الموجى :

تركيب الشكل الموجى هو جمع الأجزاء التى يتكون منها الشكل الكلى . وهو فى تحليل فورير عبارة عن جمع حدود المتسلسلة ذات النسب المثلثية ، وعادة تكون الأربعة أو الخمسة الحدود الأولى . وبعد تركيب الموجة فإنه يمكن للطالب أن يقتنع أن متسلسلة فورير تعبر فى الواقع عن الموجة الدورية التى حصل عليها .

والمتسلسلة المثلثية لموجة سن المنشار فى المثال (١) . والتى لها سعة عظمى 10 هى

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi}\sin\omega t - \frac{10}{2\pi}\sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi}\sin 3\omega t - \cdots$$


شكل ١٥ — ١١

وفى الشكل ١٥ — ١١ رسمت هذه الحدود الأربعة بالإضافة إلى مجموعها وبالرغم من أن النتيجة ليست موجة سن منشار تماماً فإنه من الواضح أنه بإضافة حدود أخرى فإن الرسم يقترب من سن المنشار . بما أن هذه الموجة غير متصلة عند عدة نقط فإن متسلسلتها لاتتقارب بسرعة وبالتالى فإن استخدام أربعة حدود لتركيب الشكل الموجى لاينتج عنه نتيجة سليمة تماماً. وسعة الحد التالى الذى تردده 4ω هى $10/4\pi$ لها قيمة محسوسة بالنسبة للسعة الأساسية $10/\pi$. وكل حد يضاف فى تركيب الشكل الموجى يقلل من عدم الانتظام الناتج وبذلك يتحسن تقريب الشكل الموجى الأساسى . وهذا ما كنا نعنيه عند قولنا سابقاً إن « المتسلسلة تتقارب إلى الدالة عند جميع نقط الاتصال وتتقارب إلى القيمة المتوسطة عند نقط عدم الاتصال » . يتضح من الشكل ١٥ — ١١ عند النقط 0 و 2π أن القيمة 5 تظل كما هى وذلك لأن جميع الحدود الجيبية تساوى صفراً عند هاتين النقطتين ، وهى نقط عدم الاتصال ، وقيمة الدالة عندما تقترب من جهة اليسار هى 10 وعندما تقترب من جهة اليمين 0 وقيمتها المتوسطة هى 5 .

القدرة والقيمة الفعالة :

ينتج عن تيار على شكل موجة دورية غير جيبية ومار فى مقاومة قدرة تعين بالقيمة الفعالة أو جذر متوسط مربع القيمة (rms) للموجه . وقد وجدنا فى الفصل الثانى أن القيمة الفعالة لدالة على الشكل

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \cdots + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \cdots$$

هى

$$F_{rms} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a_0)^2 + \tfrac{1}{2}a_1^2 + \tfrac{1}{2}a_2^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}b_1^2 + \tfrac{1}{2}b_2^2 + \cdots} \qquad (١٨)$$

وبالتعبير عن سعة التردد بالمعادلة $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ وكتابة c_0 لمتوسط القيمة ، نجد من المعادلة (١٨) أن

$$F_{rms} = \sqrt{c_0^2 + \tfrac{1}{2}c_1^2 + \tfrac{1}{2}c_2^2 + \tfrac{1}{2}c_3^2 + \cdots}$$

وباعتبار شبكة كهربائية خطية يؤثر عليها جهد دورى ، يمكننا أن نتوقع أن التيار الناتج يحتوى على نفس الحدود الترددية كما فى الجهد ولكن بسعات توافقية تختلف قيمها النسبية وذلك لتغير المعاوقة مع $n\omega$. ومن المحتمل عدم ظهور بعض الترددات فى التيار حيث أنه فى حالة الرنين على التوازى ينتج معاوقة غير محدودة . وعموماً يمكننا كتابة

$$i = I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n) \quad \text{و} \quad v = V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \qquad (١٩)$$

والقيم الفعالة المناظرة هى

$$I_{rms} = \sqrt{I_0^2 + \tfrac{1}{2}I_1^2 + \tfrac{1}{2}I_2^2 + \cdots} \quad \text{و} \quad V_{rms} = \sqrt{V_0^2 + \tfrac{1}{2}V_1^2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 + \cdots} \qquad (٢٠)$$

والقدرة المتوسطة P تنتج من تكامل القدرة اللحظية التى تعطى بحاصل الضرب vi .

$$p = vi = [V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \varphi_n)][I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n)] \qquad (٢١)$$

بما أن كلا من v و i لهما دورة T sec فإن حاصل ضربهما له عدد صحيح من دوراتهما فى T . (وإذا كان الجهد المؤثر دالة جيبية واحدة فإن حاصل الضرب vi له دورة تساوى نصف دورة موجه الجهد) . ومتوسط القدرة هو

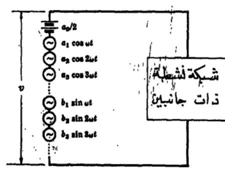
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T [V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \varphi_n)][I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n)]\, dt \qquad (٢٢)$$

واختبار الحدود الممكنة فى حاصل ضرب المتسلسلتين اللانهائيتين يوضح أنهما يحتويان على الأنواع : حاصل ضرب الثابتين ، حاصل ضرب الثابت والدالة الجيبية ، حاصل ضرب دالتين جيبيتين بترددين مختلفين ، مربع دالة جيبية . ونجد بعد التكامل أن حاصل ضرب الثابتين لايزال $V_0 I_0$ ويظهر مربع الدالة الجيبية بالحدود المطبقة على الصورة $(V_n I_n/2)\cos(\varphi_n - \psi_n)$ بينما تئول جميع المضاريب بعد التكامل على الدورة T إلى الصفر . إذن متوسط القدرة هو

$$P = V_0 I_0 + \tfrac{1}{2}V_1 I_1 \cos\theta_1 + \tfrac{1}{2}V_2 I_2 \cos\theta_2 + \tfrac{1}{2}V_3 I_3 \cos\theta_3 + \cdots \qquad (٢٣)$$

حيث $\theta_n = (\varphi_n - \psi_n)$ هى زاوية المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية عند التردد $n\omega$ rad/sec ، V_n و I_n هما القيمتان العظميان لدالتى الجهد والتيار الجيبيتين . نجد فى دوائر التيار المتردد وحيدة التردد أن متوسط القدرة هو $P = VI\cos\theta$ وهى محتواة فى المعادلة (٢٣) حيث V هى القيمة الفعالة للجهد . $V = V_{max}/\sqrt{2}$ و $I = I_{max}/\sqrt{2}$ أى أن $P = \frac{1}{2}V_{max} I_{max} \cos\theta$. القدرة فى دوائر التيار المستمر البسيطة هى VI وهى محتواة فى المعادلة (٢٣) بالحد $V_0 I_0$. وعلى ذلك فإن معادلة القدرة (٢٣) هى معادلة عامة تماماً وتحتوى على التيار المستمر والتيار المتردد وحيد التردد وأيضاً على أمواج دورية غير جيبية . ونلاحظ أيضاً فى المعادلة (٢٣) أنه لايوجد أى إسهام فى متوسط القدرة من الجهد والتيار المختلفين فى التردد وعلى ذلك فإنه بالنسبة للقدرة يؤثر كل تردد على حدة .

تطبيقات على تحليل الدوائر :



شكل ١٥ — ١٢

لقد اقترحنا فيما سبق أنه يمكننا تطبيق حدود متسلسلة الجهد على شبكة خطية للحصول على الحدود الترددية المناظرة لمتسلسلة التيار . وقد حصلنا على هذه النتيجة من التراكب . وعلى هذا فإننا نعتبر كل حد فى متسلسلة فورير يمثل جهداً ناتجاً عن مصدر واحد كما فى الشكل ١٥ — ١٢ . والآن تستخدم المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية عند كل ذبذبة تردد $n\omega$ لحساب التيار عند ذلك التردد . مجموع هذه الاستجابات الفردية هى الاستجابة الكلية i على شكل متسلسلة والناتجة عن الجهد المؤثر .

مثال ٣ :

دائرة RL على التوالى فيها $R = 5\,\Omega$ و $L = 0.02$ H يؤثر عليها جهد $v = 100 + 50 \sin \omega t + 25 \sin 3\omega t$ volts حيث $\omega = 500$ rad/sec . أوجد التيار والقدرة المتوسطة .

نحسب المعاوقة المكافئة عند كل ذبذبة . وبذلك نحصل على التيارات المناظرة .

عند $\omega = 0$ فإن $Z = 5\,\Omega$ و $I_0 = V_0/R = 100/5 = 20$ A

شكل ١٥ — ١٣

عند $\omega = 500$ rad/sec فإن $\mathbf{Z}_1 = 5 + j(0{\cdot}02)(500) = 5 + j10\ \Omega$

$$i_1 = \frac{V_{1\,max}}{|\mathbf{Z}_1|}\sin(\omega t - \theta_1) = \frac{50}{11{\cdot}15}\sin(\omega t - 63{\cdot}4^\circ) = 4{\cdot}48\sin(\omega t - 63{\cdot}4^\circ)\ \text{amperes}$$

عند $3\omega = 1500$ rad/sec فإن $\mathbf{Z}_3 = 5 + j30\ \Omega$.

$$i_3 = \frac{V_{3\,max}}{|\mathbf{Z}_3|}\sin(3\omega t - \theta_3) = \frac{25}{30{\cdot}4}\sin(3\omega t - 80{\cdot}54^\circ) = 0{\cdot}823\sin(3\omega t - 80{\cdot}54^\circ)\ \text{amperes}$$

ومجموع التيارات التوافقية هو الاستجابة الكلية المطلوبة

$$i = 20 + 4{\cdot}48\sin(\omega t - 63{\cdot}4^\circ) + 0{\cdot}823\sin(3\omega t - 80{\cdot}54^\circ)\ \text{amperes}$$

والقيمة الفعالة لهذا التيار هى

$$I_{rms} = \sqrt{20^2 + 4{\cdot}48^2/2 + 0{\cdot}823^2/2} = \sqrt{410{\cdot}6} = 20{\cdot}25\ \text{A}$$

والقدرة الناتجة عنها فى المقاومة $5\ \Omega$ هى

$$P = I^2_{rms}R = (410{\cdot}6)5 = 2053\ \text{W}$$

وكاختبار للنتيجة فإننا نحسب متوسط القدرة الكلية بحساب القدرة الناتجة عن كل تردد ثم جمعها فينتج أن

عند $\omega = 0$: $P = V_0I_0 = 100(20) = 2000$ W

عند $\omega = 500$ rad/sec : $P = \frac{1}{2}V_1I_1\cos\theta_1 = \frac{1}{2}(50)(4{\cdot}48)\cos 63{\cdot}4^\circ = 50{\cdot}1$ W

عند $3\omega = 1500$ rad/sec : $P = \frac{1}{2}V_3I_3\cos\theta_3 = \frac{1}{2}(25)(0{\cdot}823)\cos 80{\cdot}54^\circ = 1{\cdot}69$ W

إذن $P_T = 2000 + 50{\cdot}1 + 1{\cdot}69 = 2052$ W

طريقة أخرى :

متسلسلة الجهد المؤثر على المقاومة هى

$$v_R = Ri = 100 + 22{\cdot}4\sin(\omega t - 63{\cdot}4^\circ) + 4{\cdot}11\sin(3\omega t - 80{\cdot}54^\circ)\ \text{volts}$$

و

$$V_R = \sqrt{100^2 + \frac{1}{2}(22{\cdot}4)^2 + \frac{1}{2}(4{\cdot}11)^2} = \sqrt{10{,}259} = 101{\cdot}3\ \text{V}$$

إذن القدرة المعطاة بالمصدر هى

$$P = V_R^2/R = (101{\cdot}3)^2/5 = 2052\ \text{W}$$

وبنفس الطريقة تستخدم متسلسلة فورير الأسية فيما عدا أن معاوقة الدائرة يعبر عنها عادة بحدود فى $n\omega$. ويمكن حساب معاملات متسلسلة التيار $\mathbf{I}_n$ من النسبة $\mathbf{V}_n/\mathbf{Z}_n$ كما هو موضح فى مثال (٤) التالى .

مثال ٤ :

يؤثر جهد على شكل الموجة المثلثية الموضحة فى الشكل ١٥ – ١٤ على مكثف نقى سعته C farads . عين التيار الناتج .

دالة الجهد فى الفترة $-\pi < \omega t < 0$ هى

$$v = V_{max} + (2V_{max}/\pi)\omega t$$

وفى الفترة $0 < \omega t < \pi$ هى

$$v = V_{max} \quad (2V_{max}/\pi)\omega t$$

إذن يمكن تعيين معاملات المتسلسلة الأسية بحساب التكامل

شكل ١٥ — ١٤

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}[V_{max} + (2V_{max}/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\,d(\omega t)$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[V_{max} - (2V_{max}/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\,d(\omega t)$$

ومنه نجد أن $\mathbf{A}_n = \frac{4V_{max}}{\pi^2 n^2}$ لجميع القيم n الفردية و $\mathbf{A}_n = 0$ لجميع قيم n الزوجية .

ومعاوقة الدائرة $\mathbf{Z} = 1/j\omega C$ يمكن التعبير عنها كدالة فى n أى أن $\mathbf{Z}_n = 1/jn\omega C$. والآن لدينا

$$\mathbf{I}_n = \frac{\mathbf{V}_n}{\mathbf{Z}_n} = \frac{4V_{max}}{\pi^2 n^2}(jn\omega C) = j\left(\frac{4V_{max}\,\omega C}{\pi^2 n}\right)$$

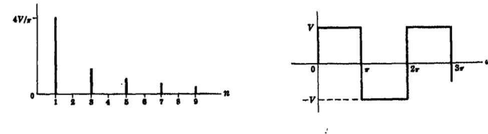
ومتسلسلة التيار هى

$$i = j\left(\frac{4V_{max}\,\omega C}{\pi^2}\right)\sum \frac{e^{jn\omega t}}{n} \qquad \text{لقيم } n \text{ الفردية فقط}$$

يمكن للمتسلسلة أن تتقارب إلى الشكل المثلثى وبالتالى تبين لنا تركيب الشكل الموجى للتيار . وعلى ذلك فإن هذه المتسلسلة لها نفس الشكل الناتج فى المسألة ١٥ – ٨ حيث المعامل $\mathbf{A}_n = -j(2V/n\pi)$ لقيم n الفردية فقط . والإشارة السالبة هنا تعنى أن موجة هذا التيار هى سالب الموجة المربعة فى المسألة ١٥ – ٨ وأن قيمتها العظمى هى $(2V_{max}\omega C)/\pi$.

مســائل محلولة

١٥ – ١ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية للموجة المربعة الموضحة فى الشكل ١٥ – ٢٥ وارسم الطيف الخطى لها .



شكل ١٥ — ١٦

شكل ١٥ — ١٥

فى الفترة $0 < \omega t < \pi$ نجد أن $f(t) = V$ وفى الفترة $\pi < \omega t < 2\pi$ نجد أن $f(t) = -V$. والقيمة المتوسطة للموجة تساوى صفراً ؛ إذن $a_0/2 = 0$. ونحصل على معاملات الجيب تمام بكتابة التكاملات التى يجب حسابها مع إدخال الدوال كما يلى :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} V \cos n\omega t \, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \cos n\omega t \, d(\omega t)\right\} = \frac{V}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}\sin n\omega t\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n}\sin n\omega t\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}$$
$$= 0$$

لجميع قيم n .

وعلى هذا فالمتسلسلة لاتحتوى على حدود جيب تمام . وباتباع نفس الطريقة مع التكاملات التى يجب حسابها للحدود الجيبية نجد أن

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} V \sin n\omega t \, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \sin n\omega t \, d(\omega t)\right\} \\ &= \frac{V}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{n}\cos n\omega t\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{n}\cos n\omega t\right]_{\pi}^{2\pi}\right\} \\ &= \frac{V}{\pi n}(-\cos n\pi + \cos 0 + \cos n2\pi - \cos n\pi) = \frac{2V}{\pi n}(1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

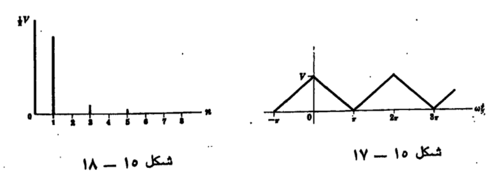
إذن $b_n = 4V/\pi n$ عندما $n = 1, 2, 5, \ldots$ و $b_n = 0$ عندما $n = 2, 4, 6, \ldots$. ومتسلسلة الموجة المربعة هى

$$f(t) = \frac{4V}{\pi}\sin \omega t + \frac{4V}{3\pi}\sin 3\omega t + \frac{4V}{5\pi}\sin 5\omega t + \cdots$$

ويوضح الشكل ١٥ – ١٦ الطيف الخطى لهذه المتسلسلة . وتحتوى المتسلسلة على حدود جيبية بترددات فردية فقط وهى التى يمكن استخدامها فى اختبار تماثل الشكل الموجى .

وبما أن موجة الشكل ١٥ – ١٥ فردية فإن متسلسلتها تحتوى على حدود جيبية فقط وبما أن لها أيضاً تماثل موجى فإنهما تحتوى على ترددات فردية فقط .

١٥ – ٧ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية للموجة المثلثية الموضحة فى الشكل ١٥ – ١٧ . وارسم طيفها الخطى .



شكل ١٥ — ١٨

شكل ١٥ — ١٧

الموجة دالة زوجية لأن $f(t) = f(-t)$ ، وإذا أزلنا القيمة المتوسطة $V/2$ فإنه يكون لها أيضاً تماثل نصف موجى ، أى أن $f(t) = -f(t + T/2)$. وفى الفترة $0 < \omega t < -\pi$ فإن $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$ وفى الفترة $0 < \omega t < \pi$ فإن $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$. وبما أن الشكل الموجى الزوجى يحتوى على حدود جيب تمام فقط فإن $b_n = 0$ لجميع قيم n الصحيحة .

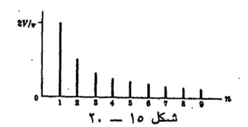
$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[V + (V/\pi)\omega t]\cos n\omega t\, d(\omega t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[V - (V/\pi)\omega t]\cos n\omega t\, d(\omega t) \\
&= \frac{V}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\omega t\, d(\omega t) + \int_{-\pi}^{0}\frac{\omega t}{\pi}\cos n\omega t\, d(\omega t) - \int_{0}^{\pi}\frac{\omega t}{\pi}\cos n\omega t\, d(\omega t)\right\} \\
&= \frac{V}{\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{n^2}\cos n\omega t + \frac{\omega t}{n}\sin n\omega t\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{1}{n^2}\cos n\omega t + \frac{\omega t}{n}\sin n\omega t\right]_{0}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{V}{\pi^2 n^2}\{\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0\} \quad = \quad \frac{2V}{\pi^2 n^2}(1 - \cos n\pi)
\end{aligned}
$$

وكما نتوقع من التماثل النصف . موجى فإن المتسلسلة تحتوى فقط على حدود فردية حيث $a_n = 0$ عندما $n = 2, 4, 6, ..$ وعندما $n = 1, 3, 5 ..$ فإن $a_n = 4V/\pi^2 n^2$. إذن متسلسلة فورير المطلوبة هى

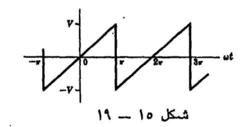
$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{4V}{\pi^2}\cos\omega t + \frac{4V}{(3\pi)^2}\cos 3\omega t + \frac{4V}{(5\pi)^2}\cos 5\omega t + \cdots$$

وتقل المعاملات بمعدل $1/n^2$ ، وعلى هذا فإن تقارب المتسلسلة أسرع من تلك التى فى المسألة ١٥ – ١ . وتظهر هذه الحقيقة من الطيف الخطى الموضح فى الشكل ١٥ – ٨ .

– ٣ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية لموجة سن المنشار الموضحة فى الشكل ١٥ – ١٩ وارسم طيفها .



شكل ١٥ – ٢٠



شكل ١٥ – ١٩

بالفحص نلاحظ أن القيمة المتوسطة للموجة تساوى صفراً وأن الموجة فردية . وبالتالى فإن المتسلسلة تحتوى فقط على حدود جيبية . ويصف التعبير $f(t) = (V/\pi)\omega t$ الموجه فى الدورة من $-\pi$ إلى $+\pi$ وسوف نستخدم هذه الحدود فى حساب قيمة التكامل للحصول على b_n .

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(V/\pi)\omega t\sin n\omega t\, d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\sin n\omega t - \frac{\omega t}{n}\cos n\omega t\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2V}{n\pi}(\cos n\pi)$$

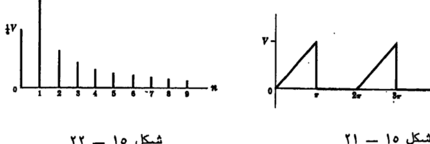
وحيث أن قيم $\cos n\pi$ موجبة لقيم n الزوجية وسالبة لقيم n الفردية فإن إشارات المعاملات تكون متناوبة . والمتسلسلة المطلوبة هى

$$f(t) = \frac{2V}{\pi}\{\sin\omega t - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t - \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t + \cdots\}$$

وتتناقص الحدود بمعدل $1/n$ وعلى ذلك فالمتسلسلة تتقارب ببطء كما هو موضح بالطيف فى الشكل ١٥ — ٢٠ . وباستثناء إزاحة نقطة أصل المحاور والحد المتوسط فإن هذا الشكل الموجى هو نفسه الموجود فى المثال (١) . قارن الطيف الخطى فى الشكل ١٥ — ٩ بما فى الشكل ١٥ — ٢٠ ولاحظ التشابه الموجود .

١٥ — ٤ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية للشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥ — ٢١ وارسم الطيف .

فى الفترة $0 < \omega t < \pi$ نجد أن $f(t) = (V/\pi)\omega t$ وفى الفترة $\pi < \omega t < 2\pi$ نجد أن $f(t) = 0$. وبالفحص نجد أن القيمة المتوسطة للموجة هى $V/4$. وبما أن الموجة لا هى زوجية ولا فردية فالمتسلسلة يجب أن تحتوى على حدود جيبية وحدود جيب تمامية معاً . وفى الفترة من 0 إلى π ، نحصل على



شكل ١٥ — ٢٢ شكل ١٥ — ٢١

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(V/\pi)\omega t\cos n\omega t\, d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\cos n\omega t + \frac{\omega t}{n}\sin n\omega t\right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi - 1)$$

عندما n زوجية فإن $(\cos n\pi - 1) = 0$ و $a_n = 0$. وعندما n فردية فإن $a_n = -2V/(\pi^2 n^2)$
ومعاملات b_n هى

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(V/\pi)\omega t\sin n\omega t\, d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\sin n\omega t - \frac{\omega t}{n}\cos n\omega t\right]_0^{\pi} = -\frac{V}{\pi n}(\cos n\pi)$$

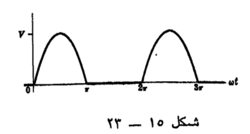
وتتناوب الإشارات حيث $b_n = -V/\pi n$ لقيم n الزوجية و $b_n = +V/\pi n$ لقيم n الفردية ومتسلسلة فورير المطلوبة هى

$$f(t) = \frac{V}{4} - \frac{2V}{\pi^2}\cos\omega t - \frac{2V}{(3\pi)^2}\cos 3\omega t - \frac{2V}{(5\pi)^2}\cos 5\omega t - \cdots$$

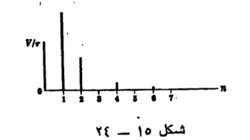
$$+ \frac{V}{\pi}\sin\omega t - \frac{V}{2\pi}\sin 2\omega t + \frac{V}{3\pi}\sin 3\omega t - \cdots$$

وتعطى سعات الترددات الزوجية مباشرة بمعاملات b_n ، وذلك لعدم وجود حدود جيب تمامية زوجية . وعلى ذلك فإنه يجب استخدام $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ لحساب سعات الترددات الفردية. إذن $c_1 = \sqrt{(2V/\pi^2)^2 + (V/\pi)^2} = V(0.377)$. وبالمثل $c_3 = V(0.109)$ و $c_5 = V(0.064)$. ويوضح الشكل ١٥ — ٢٢ الطيف الخطى .

١٥ — ٥ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية للدالة الجيبية المقومة تقويماً نصف موجياً والموضحة فى الشكل ١٥ — ٢٣ وارسم الطيف .



شكل ١٥ — ٢٣



شكل ١٥ — ٢٤

لاتبين الموجة أى تماثل ولذلك فإننا نتوقع أن تحتوى المتسلسلة على حدود جيبية وجيب تمامية معا . بما أنه لايمكن الحصول على القيمة المتوسطة بالفحص فإننا نحسب a_0 الحد $a_0/2$ فى المتسلسلة

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\Big[-\cos \omega t\Big]_0^{\pi} = \frac{2V}{\pi}$$

ثم نعين بعد ذلك a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \sin \omega t \cos n\omega t \, d(\omega t)$$

$$= \frac{V}{\pi}\left[\frac{-n \sin \omega t \sin n\omega t - \cos n\omega t \cos \omega t}{-n^2+1}\right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi(1-n^2)}(\cos n\pi + 1)$$

عندما n زوجية فإن $a_n = 2V/\pi(1-n^2)$; وعندما n فردية فإن $a_n = 0$ وحيث أن هذا التعبير غير محدد عندما $n = 1$ ، إذن فإننا يجب أن نكامل على حدة للحصول على a_1 .

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \sin \omega t \cos \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\int_0^{\pi} \tfrac{1}{2} \sin 2\omega t \, d(\omega t) = 0$$

والآن نحسب b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \sin \omega t \sin n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\left[\frac{n \sin \omega t \cos n\omega t - \sin n\omega t \cos \omega t}{-n^2+1}\right]_0^{\pi} = 0$$

ونجد هنا أيضاً أن هذا التعبير غير محدد عندما $n = 1$ وعلى ذلك فإن b_1 تحسب على حدة .

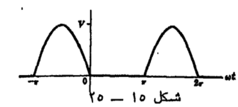
$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V \sin^2 \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{V}{2}$$

ومتسلسلة فورير المطلوبة هى

$$f(t) = \frac{V}{\pi}\left\{1 + \frac{\pi}{2}\sin \omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right\}$$

والطيف فى الشكل ١٥ — ٢٤ يبين الحد الأساسى القوى فى المتسلسلة وكذلك سعات الترددات الأعلى التى تتناقص سريعاً .

١٥ – ٦ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية للموجة الجيبية المقومة تقويماً نصف موجى والموضحة فى الشكل ١٥ – ٢٥ ؛ حيث أزيح المحور الرأسى عن موضعه فى المسألة ١٥ – ٥ .



شكل ١٥ — ٢٥

الدالة معرفة فى الفترة $-\pi < \omega t < 0$ بالعلاقة $f(t) = -V \sin \omega t$. والقيمة المتوسطة هى نفسها كما فى المسألة ١٥ – ٥ ، أى أن $a_0 = 2V/\pi$ ولدينا للمعاملات a_n .

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \sin \omega t) \cos n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi(1-n^2)}(1 + \cos n\pi)$$

وعندما n زوجية فإن $a_n = 2V/\pi(1-n^2)$ وعندما n فردية فإن $a_n = 0$ فيما عدا $n = 1$ حيث يجب اختبارها على حدة .

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \sin \omega t) \cos \omega t \, d(\omega t) = 0$$

ولدينا المعاملات b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V \sin \omega t) \sin n\omega t \, d(\omega t) = 0$$

ولكن مرة أخرى نجد أن هذا التعبير غير محدد عندما $n = 1$ ، وعلى هذا فإننا نحسب b_1 على حدة

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-V) \sin^2 \omega t \, d(\omega t) = -\frac{V}{2}$$

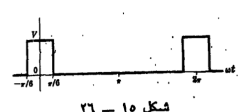
إذن المتسلسلة هى

$$f(t) = \frac{V}{\pi}\left\{1 - \frac{\pi}{2}\sin \omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right\}$$

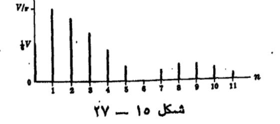
وهذه المتسلسلة متطابقة مع متسلسلة المسألة ١٥ – ٥ فيما عدا الحد الأساسى الذى له إشارة سالبة فى هذه المتسلسلة . ومن الواضح أن الطيف مطابق لما فى الشكل ١٥ – ٢٤ .

١٥ – ٧ أوجد متسلسلة فورير المثلثية للنبضة المستطيلة الموضحة فى الشكل ١٥ – ٢٦ وارسم الطيف .

بوضع نقطة أصل المحاور كما فى الشكل تكون الموجه زوجية وبذلك فإن المتسلسلة تحتوى على حدود جيب تمامية فقط بالإضافة إلى حد ثابت . وتستخدم الدورة من $-\pi$ إلى $+\pi$ فى حساب قيم التكاملات وقيمة الدالة تساوى صفراً فيما عدا فى الفترة من $-\pi/6$ إلى $+\pi/6$.



شكل ١٥ — ٢٦



شكل ١٥ — ٢٧

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} V\,d(\omega t) = \frac{V}{3}, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} V\cos n\omega t\,d(\omega t) = \frac{2V}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{6}$$

بما أن $\sin n\pi/6 = 1/2, \sqrt{3}/2, 1, \sqrt{3}/2, 1/2, 0, -1/2, \ldots$ عندما $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ على الترتيب ، فالمتسلسلة هى

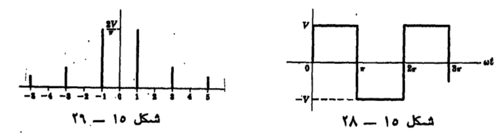
$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\cos\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\cos 2\omega t + 1\left(\frac{1}{3}\right)\cos 3\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\cos 4\omega t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)\cos 5\omega t - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)\cos 7\omega t - \cdots\right\}$$

أو

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi/6)\cos n\omega t$$

والطيف الخطى الموضح فى الشكل ١٥–٢٧ يتناقص ببطء جدا لهذه الموجة ، حيث أن المتسلسلة تتقارب ببطء جدا إلى الدالة . من الأشياء التى لها اهتمام خاص حقيقة أن سعات الترددات الثامن والتاسع والعاشر تزداد عن سعة التردد السابع . ونجد للموجات البسيطة السابق اعتبارها أن سعات الترددات العالية تتناقص باستمرار .

١ – ٨ أوجد متسلسلة فورير الأسية للموجة المربعة الموضحة فى الشكل ١٥–٢٨ . وارسم طيفها الخطى . أوجد معاملات المتسلسلة المثلثية وقارنها بالمسألة ١٥–١ .



شكل ١٥ — ٢٦   شكل ١٥ — ٢٨

فى الفترة $-\pi < \omega t < 0$ نجد أن $f(t) = -V$ وفى الفترة $0 < \omega t < \pi$ نجد أن $f(t) = V$. والقيمة المتوسطة للموجة تساوى صفرا . والموجه فردية ، إذن المعاملات $\mathbf{A}_n$ تخيلية تماما .

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-V)e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{0}^{\pi} Ve^{-jn\omega t}\,d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{2\pi}\left\{-\left[\frac{1}{(-jn)}e^{-jn\omega t}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{(-jn)}e^{-jn\omega t}\right]_{0}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{V}{(-j2\pi n)}(-e^{0} + e^{jn\pi} + e^{-jn\pi} - e^{0}) = j\frac{V}{n\pi}(e^{jn\pi} - 1)$$

عندما n زوجية نجد $e^{jn\pi} = +1$ و $\mathbf{A}_n = 0$ ، وعندما n فردية نجد أن $e^{jn\pi} = -1$ و $\mathbf{A}_n = -j(2V/n\pi)$

ومتسلسلة فورير المطلوبة هى

$$f(t) = \cdots + j\frac{2V}{3\pi}e^{-j3\omega t} + j\frac{2V}{\pi}e^{-j\omega t} - j\frac{2V}{\pi}e^{j\omega t} - j\frac{2V}{3\pi}e^{j3\omega t} - \cdots$$

ويوضح الطيف فى الشكل ١٥ – ٢٩ سمات لذبذبات موجبة وسالبة معا . وبجمع القيم عند $+n$ و $-n$ ينتج السعة المرسومة للمتسلسلة ذات النسب المثلثية فى الشكل ١٥ – ١٦ .

معاملات الجيب تمام فى المتسلسلة المثلثية هى

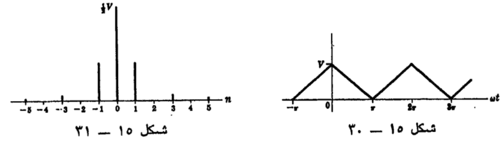
$$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = -j\frac{2V}{n\pi} + \left(-j\frac{2V}{(-n\pi)}\right) = 0$$

و

لقيم n الفردية فقط .
$$b_n = j[\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}] = j\left[-j\frac{2V}{n\pi} + j\frac{2V}{(-n\pi)}\right] = \frac{4V}{n\pi}$$

وهذا يتفق مع معاملات المتسلسلة المثلثية التى حصلنا عليها فى المسألة ١٥–١ .

١٥ – ٩ أوجد متسلسلة فورير الأسية للموجة المثلثية الموضحة فى الشكل ١٥ – ٣٠ وارسم الطيف .



شكل ١٥ — ٣٠ شكل ١٥ — ٣١

نجد فى الفترة $-\pi < \omega t < 0$ أن $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$ وفى الفترة $0 < \omega t < \pi$ أن $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$ والموجة زوجية وعلى ذلك فإن معاملات $\mathbf{A}_n$ حقيقية تماما . والقيمة المتوسطة بالفحص هى $V/2$.

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}[V + (V/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{0}^{\pi}[V - (V/\pi)\omega t]e^{-jn\omega t}\,d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left\{\int_{-\pi}^{0}\omega t\, e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{0}^{\pi}(-\omega t)e^{-jn\omega t}\,d(\omega t) + \int_{-\pi}^{\pi}\pi\, e^{-jn\omega t}\,d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left\{\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2}(-jn\omega t - 1)\right]_{0}^{\pi}\right\} = \frac{V}{\pi^2 n^2}[1 - e^{jn\pi}]$$

ونجد لقيم n الزوجية أن $e^{jn\pi} = +1$ و $\mathbf{A}_n = 0$ ولقيم n الفردية أن $\mathbf{A}_n = 2V/\pi^2 n^2$. إذن فالمتسلسلة هى

$$f(t) = \cdots + \frac{2V}{(-3\pi)^2}e^{-j3\omega t} + \frac{2V}{(-\pi)^2}e^{-j\omega t} + \frac{V}{2} + \frac{2V}{(\pi)^2}e^{j\omega t} + \frac{2V}{(3\pi)^2}e^{j3\omega t} + \cdots$$

والطيف موضح فى الشكل ١٥ – ٣١ بخطين عند $-n$ و $+n$ وعند إضافتهما نحصل على نفس السعة فى طيف الشكل ١٥ – ١٨ .

ومعاملات المتسلسلة المثلثية هى ولقيم n الفردية فقط .

$$a_n = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{-n} = \frac{2V}{\pi^2 n^2} + \frac{2V}{\pi^2(-n)^2} = \frac{4V}{\pi^2 n^2}$$

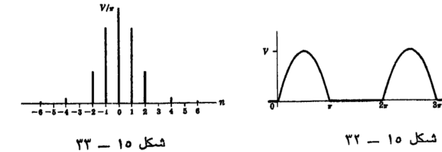
و

$$b_n = j[\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{-n}] = j\left[\frac{2V}{\pi^2 n^2} - \frac{2V}{\pi^2(-n)^2}\right] = 0$$

وهذه المعاملات تتفق مع نتيجة المسألة ١٥–٢ .

١٥ - ١٠ أوجد متسلسلة فورير الأسية للموجة الجيبية المقومة تقويما نصف موجى والموضحة فى الشكل ١٥-٣٢ .

نجد فى الفترة $0 < \omega t < \pi$ أن $f(t) = V \sin \omega t$ ونجد فى الفترة من π إلى 2π أن $f(t) = 0$. إذن



شكل ١٥ — ٣٣   شكل ١٥ — ٣٢

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} V \sin \omega t \, e^{-jn\omega t}\, d(\omega t)$$

$$= \frac{V}{2\pi}\left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(1-n^2)}(-jn \sin \omega t - \cos \omega t)\right]_0^{\pi} = \frac{V}{2\pi(1-n^2)}(e^{-jn\pi}+1)$$

ونجد لقيم n الزوجية أن $A_n = V/\pi(1-n^2)$ ولقيم n الفردية أن $e^{-jn\pi} = -1$ و $A_n = 0$. وعلى ذلك فعندما $n = \pm 1$ فإن تعبير A_n يصبح غير محدد . يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال ، أى أننا نفاضل بسط ومقام الكمية $\frac{V}{2\pi(1-n^2)}(e^{-jn\pi}+1)$ كل على حدة بالنسبة إلى n ثم نجعل n تقترب من 1 فينتج أن $A_{-1} = j(V/4)$ و $A_1 = -j(V/4)$.

والقيمة المتوسطة هى

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} V \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{2\pi}\Big[-\cos \omega t\Big]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi}$$

إذن متسلسلة فورير الأسية هى

$$f(t) = \cdots - \frac{V}{15\pi}e^{-j4\omega t} - \frac{V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + j\frac{V}{4}e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} - j\frac{V}{4}e^{j\omega t} - \frac{V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi}e^{j4\omega t} - \cdots$$

من المهم ملاحظة أنه يوجد معاملان تخيلان فقط فى المتسلسلة عند $n = \pm 1$ وأن الحد الجيبى الوحيد فى المتسلسلة المثلثية فى المسألة ١٥-٦ له معامل $b_1 = j[A_1 - A_{-1}] = j[-j(V/4)] = \frac{1}{2}V$.

ويوضح الطيف الخطى فى الشكل ١٥-٣٣ السمات الترددية للموجة وهنا يجب مقارنتها بالشكل ١٥-٢٤ .

١٥-١١ أوجد القدرة المتوسطة فى المقاومة $R = 10\,\Omega$ علما بأن التيار هو

$$i = 10 \sin \omega t + 5 \sin 3\omega t + 2 \sin 5\omega t \text{ amperes.}$$

القيمة الفعالة للتيار هى $I = \sqrt{\frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(5)^2 + \frac{1}{2}(2)^2} = \sqrt{64.5} = 8.03\text{ A}$. إذن القدرة المتوسطة هى

$$P = I^2R = (64.5)10 = 654\text{ W}$$

طريقة اخرى :

القدرة الكلية هى مجموع قدرات الترددات المختلفة وتعطى بالعلاقة $\frac{1}{2}V_{max}I_{max}\cos\theta$. ولكن زاوية الطور بين الجهد عبر المعاوقة والتيار هى $\theta_n = 0$ وذلك لكل الترددات . إذن

$$v_R = Ri = 100\sin\omega t + 50\sin 3\omega t + 20\sin 5\omega t \text{ volts}$$

و

$$P = \tfrac{1}{2}(10)(100) + \tfrac{1}{2}(5)(50) + \tfrac{1}{2}(2)(20) = 645\text{ W.}$$

١٥ – ١٢ أوجد القدرة المتوسطة المعطاة لشبكة كهربائية علما بأن الجهد والتيار الناتج يعطيان بالمعادلتين .

$$v = 50 + 50\sin 5\times 10^3 t + 30\sin 10^4 t + 20\sin 2\times 10^4 t \text{ volts}$$

$$i = 11{\cdot}2\sin(5\times 10^3 t + 63{\cdot}4^\circ) + 10{\cdot}6\sin(10^4 t + 45^\circ) + 8{\cdot}97\sin(2\times 10^4 t + 26{\cdot}6^\circ)\text{ amperes}$$

متوسط القدرة الكلية هى مجموع القدرة الناتجة من كل تردد .

$$P = \tfrac{1}{2}(50)(11{\cdot}2)\cos 63{\cdot}4^\circ + \tfrac{1}{2}(30)(10{\cdot}6)\cos 45^\circ + \tfrac{1}{2}(20)(8{\cdot}97)\cos 26{\cdot}6^\circ = 317{\cdot}7\text{ W}$$

١٥ – ١٣ أوجد ثابتى دائرة التوالى المكونة من عنصرين علما بأن الجهد المؤثر والتيار الناتج هما نفسهما المعطيان فى المسألة ١٥ – ٢.

نجد فى متسلسلة الجهد حدا ثابتا مقداره 50 ولكن لا يقابله حد فى متسلسلة التيار ، وهذا يعنى أن أحد العنصرين مكثف . وبما أنه توجد قدرة معطاة للدائرة فإن العنصر الآخر يجب أن يكون مقاومة .

القيمة الفعالة للتيار هى $I = \sqrt{\tfrac{1}{2}(11{\cdot}2)^2 + \tfrac{1}{2}(10{\cdot}6)^2 + \tfrac{1}{2}(8{\cdot}97)^2} = 12{\cdot}6\text{ A}$

القدرة المتوسطة هى $P = I^2R$ ومنها $R = P/I^2 = 317{\cdot}7/159{\cdot}2 = 2\text{ ohms}$

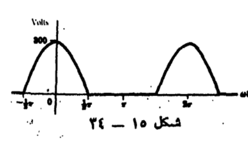
عند $\omega = 5\times 10^3$ rad/sec نجد أن $|\mathbf{Z}| = V_{max}/I_{max} = 50/11{\cdot}2 = 4{\cdot}47\,\Omega$. وبما أن

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X_C^2},\quad X_C = \sqrt{(4{\cdot}47)^2 - 4} = 4\,\Omega$$

إذن $X_C = 1/(\omega C)$ و $C = 1/(\omega X_C) = 1/4(4\times 5\times 10^3) = 50\,\mu\text{F}$

وعلى هذا فإن دائرة التوالى تتكون من عنصرين أحدهما مقاومة قيمتها $2\,\Omega$ والآخر مكثف سعته $50\,\mu\text{F}$.

١٥ – ١٤ تؤثر موجة الجهد الموضحة فى الشكل ١٥ – ٣٤ على دائرة توالى تتكون من $R = 2000\Omega$ و $L = 10$ H . استخدم متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية لتحصل على الجهد عبر المعاوقة . ارسم الطيف الخطى للجهد المؤثر و v_R لتبين تأثير الحث على الترددات . $\omega = 377$ rad/sec .



شكل ١٥ – ٣٤

القيمة المتوسطة للجهد المؤثر هى V_{max}/π ، كما فى المسألة ١٥–٥ . والدالة الموجية زوجيه وعلى ذلك فالمتسلسلة تحتوى فقط على حدود جيب تمام بمعاملات يمكن الحصول عليها بحساب التكامل التالى .

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos \omega t \cos n\omega t \, d(\omega t) = \frac{600}{\pi(1-n^2)} \cos n\pi/2$$

$\cos \pi n/2$ له قيمة -1 عندما $n = 2, 6, 10, \ldots$ و $+1$ عندما $n = 4, 8, 12, \ldots$ وعندما تكون n فردية فإن $\cos n\pi/2 = 0$. وعلى هذا فعندما $n = 1$ يكون التعبير السابق غير محدد ويجب حساب قيمته على حدة .

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos^2 \omega t \, d(\omega t) = \frac{300}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{300}{2}$$

وعلى هذا فتسلسلة الجهد تكون على الشكل

$$v = \frac{300}{\pi}\left\{1 + \frac{\pi}{2}\cos \omega t + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right\} \text{ volts}$$

المعاوقة الكلية للدائرة المتصلة على التوالى هى $\mathbf{Z} = R + jn\omega L$ وتحسب عند كل تردد فى معادلة الجهد . ويوضح الجدول المرفق النتائج المحسوبة .

n	$n\omega$	R	$n\omega L$	$\|Z\|$	θ
0	0	2 k	0	2 k	0°
1	377	2 k	3·77 k	4·26 k	62°
2	754	2 k	7·54 k	7·78 k	75·1°
4	1508	2 k	15·08 k	15·2 k	82·45°
6	2262	2 k	22·62 k	22·6 k	84·92°

تحتوى متسلسلة التيار على حدود لها معاملات تساوى المعاملات الموجودة فى متسلسلة الجهد مقسومة على Z وحدود التيار المناظرة لاحقة بزاوية مقدارها θ .

$$n = 0,\ I_0 = \frac{300/\pi}{2\text{ k}} \text{ amperes;}$$

$$n = 1,\ i_1 = \frac{300/2}{4{\cdot}26\text{ k}} \cos(\omega t - 62°) \text{ amperes;}$$

$$n = 2,\ i_2 = \frac{600/3\pi}{7{\cdot}78\text{ k}} \cos(2\omega t - 75{\cdot}1°) \text{ amperes; etc.}$$

إذن متسلسلة التيار هى

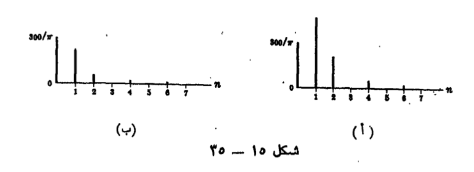
$$i = \frac{300}{2\text{ k}\,\pi} + \frac{300}{(2)4{\cdot}26\text{ k}}\cos(\omega t - 62°) + \frac{600}{3\pi(7{\cdot}78\text{ k})}\cos(2\omega t - 75{\cdot}1°)$$

$$- \frac{600}{15\pi(15{\cdot}2\text{ k})}\cos(4\omega t - 82{\cdot}45°) + \frac{600}{35\pi(22{\cdot}6\text{ k})}\cos(6\omega t - 84{\cdot}92°) - \cdots \text{ amperes}$$

والجهد عبر المقاومة 2 k هو i (2 k) أو

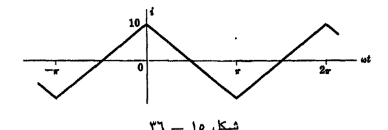
$$v_R = 95{\cdot}5 + 70{\cdot}4\cos(\omega t - 62°) + 16{\cdot}4\cos(2\omega t - 75{\cdot}1°)$$
$$- 1{\cdot}67\cos(4\omega t - 82{\cdot}45°) + 0{\cdot}483\cos(6\omega t - 84{\cdot}92°) - \cdots \text{ volts}$$

وترى بوضوح من الشكل ١٥–٣٥ كيف أن السعة الترددية لطيف الجهد المؤثر v_R قد قلت بفعل الحث 10 H المتصل على التوالي .



شكل ١٥ — ٣٥

١٥ — ١٥ إذا كان التيار المار في الحث $L = 0.01$ H له شكل موجي معطى في الشكل ١٥ — ٣٦ فأوجد المتسلسلة ذات النسب المثلثية للجهد v_L والجهد عبر الحث $\omega = 500$ rad/ses .



شكل ١٥ — ٣٦

القيمة المتوسطة للتيار تساوى صفرا والشكل الموجي زوجي . وعلى هذا فإن المتسلسلة تحتوى فقط على حدود جيب تمام . ونجد في الفترة : $-\pi < \omega t < 0$ ، أن $i = 10 + (20/\pi)\omega t$ وفي الفترة : $0 < \omega t < \pi$ أن $i = 10 - (20/\pi)\omega t$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}[10 + (20/\pi)\omega t]\cos n\omega t\, d(\omega t) + \int_{0}^{\pi}[10 - (20/\pi)\omega t]\cos n\omega t\, d(\omega t)\right\}$$

$$= \frac{40}{\pi^2 n^2}(1 - \cos n\pi) = \frac{80}{\pi^2 n^2}$$

وذلك لقيم n الفردية فقط .

إذن متسلسلة التيار هي

$$i = \frac{80}{\pi^2}\left\{\cos\omega t + \frac{1}{9}\cos 3\omega t + \frac{1}{25}\cos 5\omega t + \frac{1}{49}\cos 7\omega t + \cdots\right\}$$

والجهد عبر الحث هو

$$v_L = L\frac{di}{dt} = 0{\cdot}01\left(\frac{80}{\pi^2}\right)\frac{d}{dt}\{\cos\omega t + \tfrac{1}{9}\cos 3\omega t + \tfrac{1}{25}\cos 5\omega t + \cdots\}$$

$$= \frac{400}{\pi^2}\{-\sin\omega t - \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t - \tfrac{1}{5}\sin 5\omega t - \tfrac{1}{7}\sin 7\omega t - \cdots\}\ \text{volts}$$

ويمكن الحصول على الشكل الموجى بالتراكب ، ولكن هذه المتسلسلة تختلف عن مثيلتها فى المسألة ١٥ – ١ بإشارة سالبة . وعلى هذا فإن v_L موجة مربعة ، وسالب الشكل الموجى معطى فى الشكل ١٥ – ١٥ .

مسائل اضافية

١٥ – ١٦ ركب الشكل الموجى لمتسلسلة فورير المثلثية .

$$f(t) = \frac{8V}{\pi^2}\{\sin\omega t - \tfrac{1}{9}\sin 3\omega t + \tfrac{1}{25}\sin 5\omega t - \tfrac{1}{49}\sin 7\omega t + \cdots\}$$

١٥ – ١٧ ركب الشكل الموجى لمتسلسلة فورير .

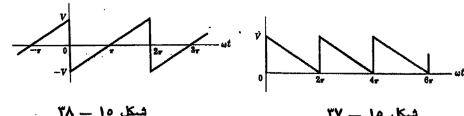
$$f(t) = 5 - \frac{40}{\pi^2}(\cos\omega t + \tfrac{1}{9}\cos 3\omega t + \tfrac{1}{25}\cos 5\omega t + \cdots)$$
$$+ \frac{20}{\pi}(\sin\omega t - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t - \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t + \cdots)$$

١٥ – ١٨ ركب الشكل الموجى لمتسلسلة فورير المعطاة .

$$f(t) = V\left\{\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\cos\omega t - \frac{1}{3\pi}\cos 2\omega t + \frac{1}{2\pi}\cos 3\omega t - \frac{1}{15\pi}\cos 4\omega t - \frac{1}{6\pi}\cos 6\omega t + \cdots + \frac{1}{4}\sin\omega t - \frac{2}{3\pi}\sin 2\omega t + \frac{4}{15\pi}\sin 4\omega t - \cdots\right\}$$

١٥ – ١٩ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية لموجة سن المنشار الموضحة فى الشكل ١٥–٣٧ وارسم الطيف الخطى . قارن بالمثال (١) .

الجواب : $f(t) = \frac{V}{2} + \frac{V}{\pi}(\sin\omega t + \tfrac{1}{2}\sin 2\omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots)$



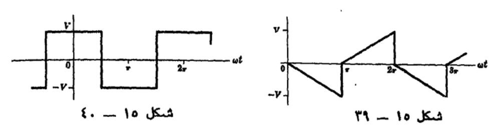
شكل ١٥ — ٣٨ شكل ١٥ — ٣٧

١٥ – ٢٠ أوجد متسلسلة فورير المثلثية لموجة سن المنشار الموضحة فى الشكل ١٥ – ٣٨ وارسم الطيف ، قارن بنتيجة المسألة ١٥–٣ .

الجواب : $f(t) = \frac{-2V}{\pi}\{\sin\omega t + \tfrac{1}{2}\sin 2\omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t + \tfrac{1}{4}\sin 4\omega t + \cdots\}$

١٥ –٢١ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية للشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥–٣٩ وارسم الطيف الخطى .

الجواب :
$$f(t) = \frac{4V}{\pi^2}\{\cos \omega t + \tfrac{1}{9}\cos 3\omega t + \tfrac{1}{25}\cos 5\omega t + \cdots\}$$
$$- \frac{2V}{\pi}\{\sin \omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t + \tfrac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\}$$



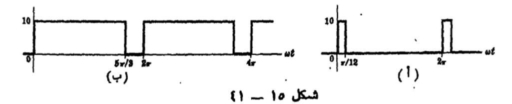
شكل ١٥ — ٤٠ شكل ١٥ — ٣٩

١٥ – ٢٢ أوجد متسلسلة فورير المثلثية للموجة المربعة الموضحة فى الشكل ١٥ – ٤٠ وارسم الطيف الخطى . قارن بنتيجة المسألة ١٥–١ .

الجواب :
$$f(t) = \frac{4V}{\pi}\{\cos \omega t - \tfrac{1}{3}\cos 3\omega t + \tfrac{1}{5}\cos 5\omega t - \tfrac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots\}$$

١٥ – ٢٣ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية للشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥–٤١ (أ)،(ب) . ارسم طيف كل منها مع المقارنة .

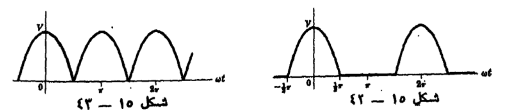
الجواب :
$$f_1(t) = \frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{10}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{12}\right)\cos n\omega t + \frac{10}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{12}\right)\sin n\omega t\right\}$$
$$f_2(t) = \frac{50}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{10}{n\pi}\left(\sin\frac{n5\pi}{3}\right)\cos n\omega t + \frac{10}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n5\pi}{3}\right)\sin n\omega t\right\}$$



شكل ١٥ — ٤١

١٥ – ٢٤ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية للموجة الجيبية المقومة نصف تقويم والموضحة فى الشكل ١٥–٤٢ وارسم الطيف الخطى . قارن الإجابة بنتيجتى المسألتين ١٥–٥ ، ١٥–٦ .

الجواب :
$$f(t) = \frac{V}{\pi}\left\{1 + \frac{\pi}{2}\cos \omega t + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\right\}$$



شكل ١٥ — ٤٣ شكل ١٥ — ٤٢

١٥ — ٢٥ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية للموجة المقومة تقويماً كاملا والموضحة فى الشكل ١٥—٤٣ وارسم الطيف .

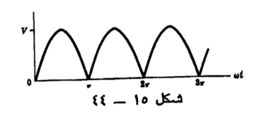
الجواب :

$$f(t) = \frac{2V}{\pi}\{1 + \tfrac{2}{3}\cos 2\omega t - \tfrac{2}{15}\cos 4\omega t + \tfrac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\}$$

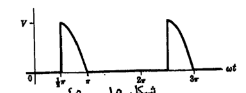
١٥ — ٢٦ الشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥—٤٤ مشابه لما فى المسألة ١٥—٢٥ ولكن مع تغيير فى موضع نقطة الأصل . أوجد متسلسلة فورير وقارن بين النتيجتين .

الجواب :

$$f(t) = \frac{2V}{\pi}\{1 - \tfrac{2}{3}\cos 2\omega t - \tfrac{2}{15}\cos 4\omega t - \tfrac{2}{35}\cos 6\omega t - \cdots\}$$



شكل ١٥ — ٤٤



شكل ١٥ — ٤٥

١٥ — ٢٧ أوجد متسلسلة فورير ذات النسب المثلثية للشكل الموجى الموضحة فى الشكل ١٥—٤٥ .

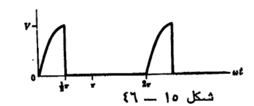
الجواب :

$$f(t) = \frac{V}{2\pi} - \frac{V}{2\pi}\cos\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{V}{\pi(1-n^2)}(\cos n\pi + n\sin n\pi/2)\cos n\omega t + \frac{V}{4}\sin\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{-nV\cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)}\right]\sin n\omega t$$

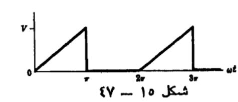
١٥ — ٢٨ أوجد متسلسلة فورير المثلثية للشكل الموجى الموضح فىالشكل ١٥—٤٦ . أضف هذه المتسلسلة لمتسلسلة المسألة ١٥—٢٧ ثم قارن المجموع بالمتسلسلة التى حصلنا عليها فى المسألة ١٥—٥ .

الجواب :

$$f(t) = \frac{V}{2\pi} + \frac{V}{2\pi}\cos\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{V[n\sin n\pi/2 - 1]}{\pi(n^2-1)}\cos n\omega t + \frac{V}{4}\sin\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{Vn\cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)}\sin n\omega t$$



شكل ١٥ — ٤٦



شكل ١٥ — ٤٧

١٥ — ٢٩ أوجد متسلسلة فورير الأسية للشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥—٤٧ . وارسم الطيف الخطى . حول المعاملات التى حصلت عليها هنا إلى معاملات متسلسلة ذات نسب مثلثية ، ثم اكتب المتسلسلة المثلثية وقارنها بنتيجة المسألة ١٥—٤ .

الجواب :

$$f(t) = V\Big\{\cdots - \left(\frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi}\right)e^{-j3\omega t} - j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t} - \left(\frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi}\right)e^{j\omega t} + j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} - \left(\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi}\right)e^{j3\omega t} - \cdots\Big\}$$

١٥–٣٠ أوجد متسلسلة فورير الأسية للشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥–٤٨ وارسم الطيف الخطى .

الجواب :

$$f(t) = V\left\{\cdots + \left(\frac{1}{9\pi^2} + j\frac{1}{6\pi}\right)e^{-j3\omega t} + j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t} + \left(\frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j\omega t} + \frac{1}{4}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi}\right)e^{j\omega t} - j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} + \left(\frac{1}{9\pi^2} - j\frac{1}{6\pi}\right)e^{j3\omega t} + \cdots\right\}$$

شكل ١٥ — ٤٩

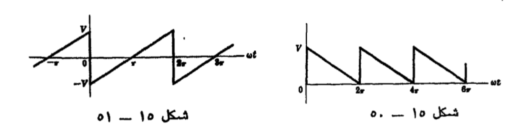
شكل ١٥ — ٤٨

١٥ – ٣١ أوجد متسلسلة فورير الأسية للشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥–٤٩ وارسم الطيف الخطى . أضف متسلسلتى المسألتين ١٥–٢٩ ، ١٥–٣٠ الأسيتين إلى بعضهما وقارن المجموع بالمتسلسلة التى حصلت عليها هنا .

الجواب : $f(t) = V\left\{\cdots + j\frac{1}{3\pi}e^{-j3\omega t} + j\frac{1}{\pi}e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j\frac{1}{\pi}e^{j\omega t} - j\frac{1}{3\pi}e^{j3\omega t} - \cdots\right\}$

١٥ – ٣٢ أوجد متسلسلة فورير الأسية لشكل سن المنشار الموجى والموضح فى الشكل ١٥ – ٥٠ وارسم الطيف . حول المعاملات التى حصلت عليها هنا إلى معاملات متسلسلة ذات نسب مثلثية ، ثم اكتب المتسلسلة المثلثية وقارن النتيجة بالمتسلسلة التى حصلنا عليها فى المسألة ١٥–١٩ .

الجواب : $f(t) = V\left\{\cdots + j\frac{1}{4\pi}e^{-j2\omega t} + j\frac{1}{2\pi}e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2\pi}e^{j\omega t} - j\frac{1}{4\pi}e^{j2\omega t} - \cdots\right\}$



شكل ١٥ — ٥١

شكل ١٥ — ٥٠

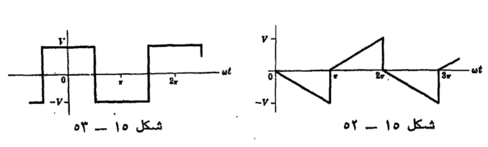
١٥ – ٣٣ أوجد متسلسلة فورير الأسية الشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥ – ٥١ . وارسم الطيف . حـــول معاملات المتسلسلة المثلثية التى حصلت عليها فى المسألة ١٥ – ٢٠ إلى معاملات متسلسلة أسية ثم قارنها بمعاملات المتسلسلة التى حصلت عليها هنا .

الجواب : $f(t) = V\left\{\cdots - j\frac{1}{2\pi}e^{-j2\omega t} - j\frac{1}{\pi}e^{-j\omega t} + j\frac{1}{\pi}e^{j\omega t} + j\frac{1}{2\pi}e^{j2\omega t} + \cdots\right\}$

١٥ - ٣٤ أوجد متسلسلة فورير الأسية للشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥-٥٢ . وارسم الطيف. حول المعاملات إلى معاملات متسلسلة مثلثية ثم اكتب المتسلسلة المثلثية وقارنها بتلك التى حصلت عليها فى المسألة ١٥-٢١ .

الجواب :

$$f(t) = V\left\{\cdots + \left(\frac{2}{9\pi^2} - j\frac{1}{3\pi}\right)e^{-j3\omega t} + \left(\frac{2}{\pi^2} - j\frac{1}{\pi}\right)e^{-j\omega t} + \left(\frac{2}{\pi^2} + j\frac{1}{\pi}\right)e^{j\omega t} + \left(\frac{2}{9\pi^2} + j\frac{1}{3\pi}\right)e^{j3\omega t} + \cdots\right\}$$



شكل ١٥ — ٥٣

شكل ١٥ — ٥٢

١٥ - ٣٥ أوجد متسلسلة فورير الأسية للموجة المربعة الموضحة فى الشكل ١٥-٥٣ . ثم ارسم الطيف الخطى . حول معاملات متسلسلة المسألة ١٥-٢٢ المثلثية إلى معاملات متسلسلة أسية وقارن بمعاملات النتيجة التى حصلت عليها هنا .

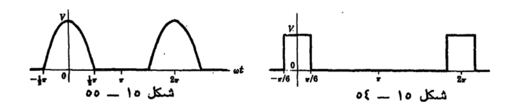
الجواب .

$$f(t) = \frac{2V}{\pi}\{\cdots + \tfrac{1}{5}e^{-j5\omega t} - \tfrac{1}{3}e^{-j3\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} - \tfrac{1}{3}e^{j3\omega t} + \tfrac{1}{5}e^{j5\omega t} - \cdots\}$$

١٥-٣٦ أوجد متسلسلة فورير الأسية للشكل الموجى الموضح فى الشكل ١٥-٥٤ وارسم الطيف الخطى .

الجواب :

$$f(t) = \cdots - \frac{V}{2\pi}\sin\left(\frac{-2\pi}{6}\right)e^{-j2\omega t} - \frac{V}{\pi}\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)e^{-j\omega t} + \frac{V}{6} + \frac{V}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{j\omega t} + \frac{V}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)e^{j2\omega t} + \cdots$$



شكل ١٥ — ٥٥

شكل ١٥ — ٥٤

١٥ - ٣٧ أوجد متسلسلة فورير الأسية للموجة الجيبية المقومة نصف تقويم والموضحة فى الشكل ١٥-٥٥ . حول هذه المعاملات إلى معاملات متسلسلة مثلثية ، ثم اكتب المتسلسلة المثلثية وقارنها بنتيجة المسألة ١٥-٢٤ .

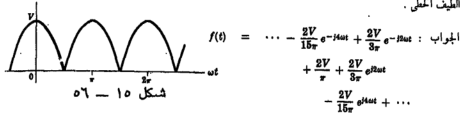
الجواب :

$$f(t) = \cdots - \frac{V}{15\pi}e^{-j4\omega t} + \frac{V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + \frac{V}{4}e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} + \frac{V}{4}e^{j\omega t} + \frac{V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi}e^{j4\omega t} + \cdots$$

١٥ – ٣٨ أوجد متسلسلة فورير الأسية للموجة الجيبية المقومة نصف تقويم والموضحة فى الشكل ١٥ – ٥٦ وارسم الطيف الخطى .

الجواب :

$$f(t) = \cdots - \frac{2V}{15\pi}e^{-j4\omega t} + \frac{2V}{3\pi}e^{-j2\omega t} + \frac{2V}{\pi} + \frac{2V}{3\pi}e^{j2\omega t} - \frac{2V}{15\pi}e^{j4\omega t} + \cdots$$



شكل ١٥ — ٥٦

١٥ – ٣٩ أوجد القيمة الفعالة للجهد والقيمة الفعالة للتيار والقدرة المتوسطة للشبكة الكهربائية الخاملة علما بأن الجهد المؤثر $v = 200 + 100\cos(500t - 30^\circ) + 75\cos(1500 - 60)$ volts والتيار الناتج هـو $i = 3.53\cos(500t + 75^\circ) + 3.55\cos(1500 + 78.45^\circ)$ amperes.

الجواب : 218.5 V, 3.54 A, 250.8 w

١٥ – ٤٠ إذا أثرنا بالجهد $v = 50 + 25\sin 500t + 10\sin 1500t + 5\sin 2500t$ volts بين طرفى شبكة كهربائية خاملة وكان التيار الناتج هو

$$i = 5 + 2.23\sin(500t - 26.6^\circ) + 0.566\sin(1500t - 56.3^\circ) + 0.186\sin(2500t - 68.2^\circ) \text{ amperes}$$

فأوجد القيمة الفعالة للجهد والقيمة الفعالة للتيار والقدرة المتوسطة .

الجواب : 53.6 V, 5.25 A ، 276.5 w

١٥ – ٤١ دائرة توالى تتكون من ثلاثة عناصر $R = 5\,\Omega$ و $L = 5$ mH و $C = 50\,\mu$F يؤثر عليها جهد $v = 150\sin 1000t + 100\sin 2000t + 75\sin 3000t$ volts. أوجد القيمة الفعالة للتيار والقدرة المتوسطة فى الدائرة . ارسم الطيف الخطى لكل من الجهد والتيار ثم لاحظ تأثير الرنين على التوالى .

الجواب : 16.58 A ، 1374 w

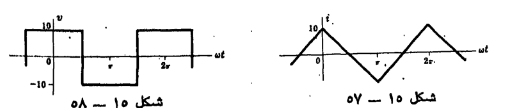
١٥ – ٤٢ دائرة توالى تتكون من عنصرين $R = 10\,\Omega$ و $L = 0.02$ H يمر بها تيار $5\sin 100t + 3\sin 300t + 2\sin 500t$ amperes. أوجد القيمة الفعالة للجهد المؤثر والقدرة المتوسطة .

الجواب : 48 V ، 190 W

١٥ – ٤٣ حث نقى قيمته $L = 0.01$ H تمر فيه موجة التيار المثلثية الموضحة فى الشكل ١٥–٥٧ حيث $\omega = 500$ rad/s أوجد متسلسلة فورير الأسية للتيار ثم أوجد متسلسلة الجهد عبر الحث v_L . قارن الاجابة بنتيجة المسألة ١٥–٨ .

الجواب :

$$v_L = \frac{200}{\pi^2}\{\cdots - j\tfrac{1}{3}e^{-j3\omega t} - je^{-j\omega t} + je^{j\omega t} + j\tfrac{1}{3}e^{j3\omega t} + \cdots\} \text{ volts}$$



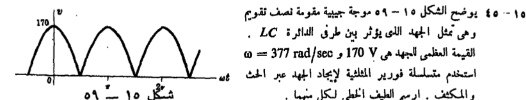
شكل ١٥ — ٥٨

شكل ١٥ — ٥٧

١٥ – ٤٤ حث نقى قيمته $L = 0.01$ H يؤثر عليه جهد شكله الموجى موضح فى الشكل ١٥–٥٨ حيث $\omega = 200$ rad/sec .
أوجد متسلسلة التيار المثلثية وحقق الشكل الموجى للتيار .

الجواب : $i \;=\; \frac{20}{\pi}\{\sin \omega t - \frac{1}{9}\sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin 5\omega t - \frac{1}{49}\sin 7\omega t + \cdots\}$ amperes

١٥ – ٤٥ يوضح الشكل ١٥ – ٥٩ موجة جيبية مقومة نصف تقويم وهى تمثل الجهد الذى يؤثر بين طرفى الدائرة LC . القيمة العظمى للجهد هى 170 V و $\omega = 377$ rad/sec استخدم متسلسلة فورير المثلثية لإيجاد الجهد عبر الحث والمكثف . ارسم الطيف الخطى لكل منهما .



شكل ١٥ ـ ٥٩

١٥ – ٤٦ دائرة تتكون من ثلاثة عناصر ؛ $R = 5\ \Omega$ متصلة على التوالى مع مجموعة L و C متصلين على التوازى . عند $\omega = 500$ rad/sec كانتا المانعتين المناظرتين هما $j2\Omega$ و $-j8\ \Omega$. أوجد التيار الكلى علماً بأن الجهد المؤثر يعطى بالمعادلة $v \quad 50 \quad 20 \sin 500t \quad 10 \sin 1000t$ volts

الجواب : $i \quad 10 \cdot 3{\cdot}53 \sin (500t \quad 28.1)$ amperes

الفصل السادس عشر

الحالات العابرة للدوائر

مقدمة :

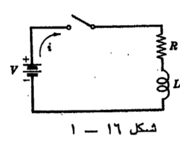
عندما تتحول دائرة كهربائية من حالة إلى حالة أخرى بواسطة تغيير فى الجهد المؤثر أو فى أحد عناصر الدائرة ، فإنه توجد فترة تحول تتغير خلالها قيم تيارات الأفرع والهبوط فى قيم الجهود من قيمها فى الحالة الأولى إلى الحالة الجديدة . وبعد فترة التحول هذه والتى تسمى « فترة عابرة » فإنه يقال إن الدوائر فى الحالة المستقرة .

ينتج عن تطبيق قانون كيرشوف للجهد على دائرة تحتوى على عناصر خازنة للطاقة معادلة تفاضلية تحل بإحدى الطرق العديدة الممكنة. وهذا الحل يتكون من جزءين «الدالة المتممة » و« الحل الخاص» . فى معادلات تحليل الدوائر الكهربية تؤول الدالة المتممة دائماً إلى الصفر سريعاً فى فترة زمنية صغيرة نسبية وهى تمثل جزء « الانتقال » فى الحل . والحل الخاص هو استجابة الحالة المستقرة والذى كان موضوع دراستنا فى الفصول السابقة . وعموماً فإن طرق الحصول على الحل الخاص فى هذا الفصل طويلة ومعقدة وغير مباشرة مثل الطرق المستخدمة سابقاً . ومع ذلك . فمن خلال تطبيق هذه الطرق فإننا نحصل على المدى الفيزيائى لاستجابة الحالة المستقرة كجزء من الاستجابة الكلية .

الحالات العابرة للتيار المستمر

دائرة RL فى حالة عابرة :

يؤثر على دائرة RL المتصلة على التوالى والموضحة فى الشكل ١٦ — ١ ، جهد ثابت V وذلك عند غلق المفتاح . وينتج عن تطبيق قانون كيرشوف للجهد المعادلة التفاضلية التالية



شكل ١٦ — ١

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V \qquad (1)$$

وبإعادة ترتيب الحدود واستخدام الترميز بالمؤثرات حيث $D = d/dt$ فإن

$$\left(D + \frac{R}{L}\right)i = \frac{V}{L} \qquad (٢)$$

المعادلة (٢) هى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى على الشكل

$$\frac{dy}{dx} - ay = \mathcal{R} \quad \text{or} \quad (D-a)y = \mathcal{R} \qquad (٣)$$

حيث $D = d/dx$, و a ثابت و R ربما تكون دالة فى x ولكن ليست دالة فى y . ويتكون الحل الكامل للمعادلة (٣) من الدالة المتممة والحل الخاص ، أى أن

$$y = y_c + y_p = ce^{ax} + e^{ax}\int e^{-ax}\mathcal{R}\,dx \qquad (٤)$$

حيث c ثابت اختيارى يعين بمعرفة الشروط الابتدائية . باستخدام (٤) يكون حل المعادلة (٢) هو

$$i = ce^{-(R/L)t} + e^{-(R/L)t}\int e^{(R/L)t}\left(\frac{V}{L}\right)dt = ce^{-(R/L)t} + \frac{V}{R} \qquad (٥)$$

لتعيين c ، نضع $t = 0$ فى المعادلة (٥) ونعوض بالتيار الابتدائى i_0 بدلا من i . هذا التيار الابتدائى هو التيار المار مباشرة بعد غلق المفتاح . ويوجد للحث علاقتان بين الجهد والتيار هما $v = L\frac{di}{dt}$ و $i = \frac{1}{L}\int v\,dt$

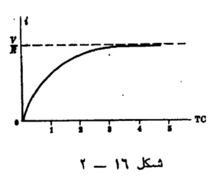
والعلاقة الثانية تؤكد لنا أنه طالما يوجد جهد مؤثر فإن التيار المار فى الحث يجب أن يكون دالة متصلة . وحيث أن التيار يساوى صفراً عندما $t = 0-$ فإنه يجب أيضاً أن يساوى صفراً عندما $t = 0+$. وبالتعويض فى المعادلة (٥) نحصل على

$$i_0 = 0 = c(1) + V/R \quad \text{أو} \quad c = -V/R \qquad (٦)$$

وبالتعويض عن قيمة c هذه فى المعادلة (٥) ينتج أن

$$i = -\frac{V}{R}e^{-(R/L)t} + \frac{V}{R} = \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \qquad (٧)$$

يعرف هذا النوع من المعادلات بالارتفاع الأسى كما هو موضح فى الشكل ١٦ — ٢ . يوضح الرسم الفترة العابرة التى يتغير خلالها التيار من قيمته الابتدائية المساوية للصفر إلى قيمته النهائية فى الحالة المستقرة V/R

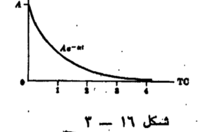


شكل ١٦ — ٢

ثابت الزمن TC لدالة مثل التى فى المعادلة (٧) هو الزمن الذى يكون عنده أس e مساوياً للوحدة . وعلى هذا فإن ثابت الزمن لدائرة RL فى حالة عابرة هو $TC = L/R$ seconds . عند 1 TC فإن الكمية التى بين القوسين فى المعادلة (٧) تأخذ القيمة $0{\cdot}632 = (1 - 0{\cdot}368) = (1 - e^{-1})$ عند هذا الزمن يكون التيار مساوياً 63.2 % من قيمته النهائية . وبالمثل عند 2 TC فإن $0{\cdot}865 = (1 - 0{\cdot}135) = (1 - e^{-2})$ ويكون التيار مساوياً 86.5 % من قيمته النهائية . وبعد 5 TC ينتهى تيار الفترة العابرة عموماً إلى الحالة النهائية ، وللسهولة نأخذ ثابت الزمن كوحدة فى رسم معادلة التيار (٧) .

كمثال آخر نأخذ الاضمحلال الأسى الموضح فى الشكل ١٦ — ٣ والممثل بالمعادلة

$$f(t) = Ae^{-\alpha t} \qquad (٨)$$



شكل ١٦ — ٣

وثابت الزمن هو أيضاً الزمن الذى يكون عنده أس e مساوياً

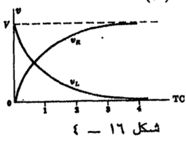
للوحدة ، أى أن $TC = 1/\alpha$. عند 1 TC فإن $e^{-1} = 0.368$ وتضمحل الدالة إلى 36.8% من قيمتها الابتدائية A . وعند 2 TC فإن $e^{-2} = 0.135$ والدالة تساوى 13.5% من A . وعند 5 TC تعتبر الحالة العابرة حالة نهائية .

نحصل على فروق الجهد العابرة على عنصرى دائرة RL من معادلة التيار . وعلى ذلك فالجهد عبر المقاومة هو :

$$v_R = Ri = V(1 - e^{-(R/L)t}) \qquad (٩)$$

والجهد عبر الحث هو

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left\{\frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t})\right\} = Ve^{-(R/L)t} \qquad (١٠)$$



شكل ١٦ — ٤

إن الجهد العابر على المقاومة له ارتفاع أسى بنفس ثابت الزمن للتيار بينما الجهد عبر الحث يعانى اضمحلالا أسياً ولكن بنفس ثابت الزمن. ومجموع v_R و v_L يحقق قانون كيرشوف أثناء فترة العبور . انظر الشكل ١٦ — ٤

$$v_R + v_L = V(1 - e^{-(R/L)t}) + Ve^{-(R/L)t} = V \qquad (١١)$$

تعطى القدرة اللحظية فى أى عنصر فى الدائرة بحاصل ضرب الجهد فى التيار وعلى هذا فإن القدرة فى المقاومة هى

$$p_R = v_R i = V(1 - e^{-(R/L)t})\frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) = \frac{V^2}{R}(1 - 2e^{-(R/L)t} + e^{-2(R/L)t}) \qquad (١٢)$$

والقدرة فى الحث هى

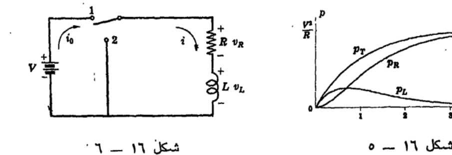
$$p_L = v_L i = Ve^{-(R/L)t}\frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) = \frac{V^2}{R}(e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t}) \qquad (١٣)$$

إذن القدرة الكلية هى

$$p_T = p_R + p_L = \frac{V^2}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \qquad (١٤)$$

يوضح الشكل ١٦ — ٥ دوال القدرة الثلاث حيث تأخذ p_R و p_T فى الحالة المستقرة القيمة V^2/R أو I^2R ، حيث I هو تيار الحالة المستقرة . وتأخذ القدرة فى الحث فى فترة العبور أو الانتقال قيمة ابتدائية وقيمة نهائية مساويتين للصفر . وهذه القدرة هى الدالة على اختزان الطاقة فى المجال المغناطيسى الملف . ولتوضيح ذلك فإننا نكامل p_L من 0 إلى ∞ .

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\infty} \frac{V^2}{R}(e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t})\,dt = \frac{V^2}{R}\left[-\frac{L}{R}e^{-(R/L)t} + \frac{L}{2R}e^{-2(R/L)t}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2}\frac{V^2}{R}\left(\frac{L}{R}\right) = \frac{1}{2}LI^2 \text{ joules} \end{aligned} \qquad (١٥)$$



شكل ١٦ — ٦ شكل ١٦ — ٥

تحتوى دائرة RL الموضحة فى الشكل ١٦ - ٦ على تيار ابتدائى $i_0 = V/R$. عند $t = 0$ يكون المفتاح فى الموضع 2 وبذلك نفصل المصدر وفى نفس الوقت نعمل دائرة مغلقة على فرع R و L المتصلين على التوالى . وبتطبيق قانون كيرشوف الجهد على الدائرة الخالية من المصدر تنتج المعادلة

$$\left(D + \frac{R}{L}\right)i = 0 \qquad \text{أو} \qquad L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \tag{١٦}$$

وحلها هو

$$i = ce^{-(R/L)t} \tag{١٧}$$

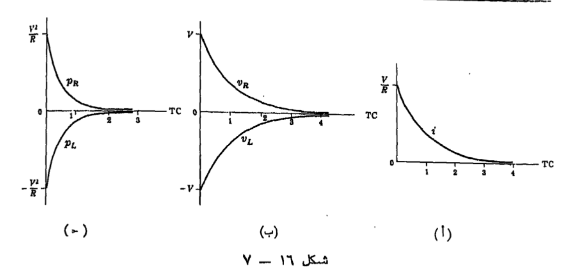
عند $t = 0$ يكون التيار الابتدائى هو $i_0 = V/R$. وبالتعويض فى المعادلة (١٧) عن $c = V/R$ فإن معادلة التيار تصبح

$$i = \frac{V}{R}e^{-(R/L)t} \tag{١٨}$$

يوضح الشكل ١٦ – ٧ (أ) هذا الاضمحلال الأسى . والجهدان المناظران عبر المقاومة والحث هما

$$v_L = L\frac{di}{dt} = -Ve^{-(R/L)t} \qquad \text{و} \qquad v_R = Ri = Ve^{-(R/L)t} \tag{١٩}$$

كما هو موضح فى الشكل ١٦ – ٧ (ب) ، ويحقق المجموع $v_R + v_L$ قانون كيرشوف حيث يكون الجهد المؤثر مساوياً الصفر عندما يكون المفتاح فى الموضع 2 . يوضح الشكل ١٦ – ٧ (جـ) القدرتين اللحظيتين . $p_R = \frac{V^2}{R}e^{-2(R/L)t}$ و $p_L = -\frac{V^2}{R}e^{-2(R/L)t}$ إذا كاملنا p_L من 0 إلى ∞ فإننا نجد أن الطاقة المنطلقة مساوية تماماً للطاقة التى اختزنت فى المجال المغناطيسى خلال فترة العبور أو الانتقال السابقة هى $\frac{1}{2}LI^2$. وتنتقل هذه الطاقة خلال اضمحلال فترة الانتقال إلى المقاومة .



شكل ١٦ — ٧

دائرة RC فى الحالة العابرة :

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على دائرة RC المتصلة على التوالى والموضحة فى الشكل ١٦ – ٨ تنتج المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + Ri = V \qquad (٢٠)$$

شكل ١٦ — ٨

وبعد إجراء التفاضل ينتج

$$\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{أو} \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)i = 0 \qquad (٢١)$$

ويتكون حل المعادلة المتجانسة هذه من الدالة المتممة فقط وذلك لأن الحل الخاص يساوى صفراً . أى أن

$$i = ce^{-t/RC} \qquad (٢٢)$$

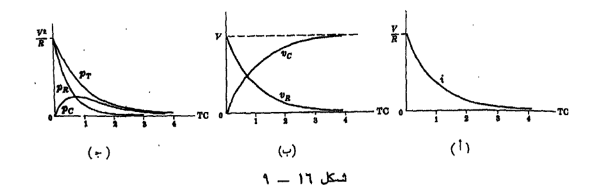
لتعيين الثابت C نلاحظ أنه عندما $t = 0$ فإن المعادلة (٢٠) تصبح $Ri_0 = V$ أو $i_0 = V/R$. والآن بالتعويض عن قيمة i_0 فى المعادلة (٢٢) نحصل على $c = V/R$ وذلك عندما $t = 0$. إذن

$$i = \frac{V}{R}e^{-t/RC} \qquad (٢٣)$$

المعادلة (٢٣) هى على شكل اضمحلال أسى كما هو موضح فى الشكل ١٦ – ٩ (أ) .

يوضح الشكل ١٦ – ٩ (ب) جهدى العبور أو الانتقال المناظرين

$$v_R = Ri = Ve^{-t/RC} \quad \text{و} \quad v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = V(1 - e^{-t/RC}) \qquad (٢٤)$$



شكل ١٦ — ٩

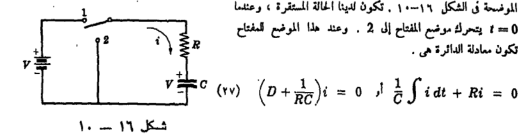
ويوضح الشكل ١٦-٩ (جـ) القدرتين اللحظيتين .

$$p_C = v_C i = \frac{V^2}{R}(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}) \quad \text{و} \quad p_R = v_R i = \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC} \qquad (٢٥)$$

وتعبر القدرة p_C فى فترة العبور بقيمتها الابتدائية والنهائية المساوية للصفر عن الطاقة المخزونة فى المجال الكهربى للمكثف وذلك بجهد ثابت عبر طرفيه . ويتحقق هذا من تكامل p_R من 0 إلى ∞

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{V^2}{R}(e^{-t/RC} - e^{-2t/RC})\, dt = \frac{1}{2}CV^2 \qquad (٢٦)$$

عندما يكون المفتاح فى الموضع 1 فى دائرة RC على التوالى الموضحة فى الشكل ١٦—١٠ . تكون لدينا الحالة المستقرة ، وعندما $t = 0$ يتحرك موضع المفتاح إلى 2 . وعند هذا الموضع للمفتاح تكون معادلة الدائرة هى .



شكل ١٦ — ١٠

$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)i = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{1}{C}\int i\, dt + Ri = 0 \qquad (٢٧)$$

والحل هـــو

$$i = ce^{-t/RC} \qquad (٢٨)$$

لتعيين الثابت c نضع $t = 0$ فى المعادلة (٢٨) ونعوض بقيمة التيار الابتدائية i_0 وحيث أن المكثف يشحن إلى جهد V بالقطبية الموضحة فى الرسم ، فإن التيار الابتدائى يكون معاكسا للتيار i ، أى أن $i_0 = -V/R$. إذن $c = -V/R$ ومعادلة التيار هى

$$i = -\frac{V}{R}e^{-t/RC} \qquad (٢٩)$$

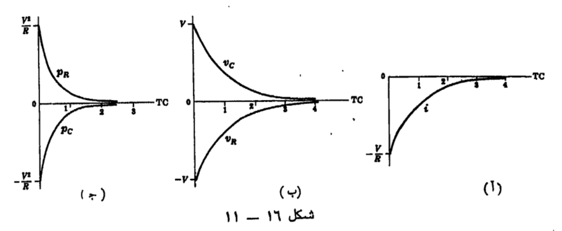
ويوضح الشكل ١٦-١١ (أ) اضمحلال فترة العبور . وجهدا العبور لعنصرى الدائرة المناظرين هما

$$v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = V e^{-t/RC} \quad \text{و} \quad v_R = Ri = -Ve^{-t/RC} \tag{٣٠}$$

كما هو موضح فى الشكل ١٦–١١ (ب) . لاحظ أن $v_R + v_C = 0$ يحقق قانون كيرشوف وذلك لعدم وجود جهد مؤثر عندما يكون المفتاح فى الموضع 2 . وقدرتا العبور هما .

$$p_C = v_C i = -\frac{V^2}{R}e^{-2t/RC} \quad \text{و} \quad p_R = v_R i = \frac{V^2}{R}e^{-2t/RC} \tag{٣١}$$

كما هو موضح فى الشكل ١٦–١١ (جـ) . لا يوجد مصدر للدلالة على p_R لكنه من الواضح أن الطاقة المخزونة فى المكثف تنتقل إلى المقاومة أثناء فترة العبور . ويترك للقارئ اثبات أن تكامل p_C بالحدين من 0 إلى ∞ يساوى $-\frac{1}{2}CV^2$.



شكل ١٦ — ١١

الشحنة فى حالة عابرة للدائرة RC

يكون من المناسب فى بعض الأحيان معرفة المعادلة الدالة على الشحنة q فى دائرة RC على التوالى فى حالة عابرة . ذلك لأن العلاقة بين التيار والشحنة هى $i = dq/dt$ ونحصل على التيار إذن عند الحاجة إلية بواسطة التفاضل .

فى الشكل ١٦–١٢ يشحن المكثف بالقطبية الموضحة ؛ حيث أن اتجاه q هو نفسه اتجاه i الموضح فى الشكل ١٦–٨. وتكتب معادلة التيار الأساسية .

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + Ri = V \tag{٣٢}$$

شكل ١٦ — ١٢

باستخدام الشحنة الأساسية والتعويض عن dq/dt بالتيار i .

إذن

$$\left(D+\frac{1}{RC}\right)q = \frac{V}{R} \quad \text{أو} \quad \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = V \tag{٣٣}$$

باستخدام الطريقة المستخدمة فى الحصول على المعادلة (٥) يكون الحل هـــو

$$q = ce^{-t/RC} + CV \qquad (٣٤)$$

عند $t = 0$ تكون الشحنة الأساسية على المكثف هى $q_0 = 0$

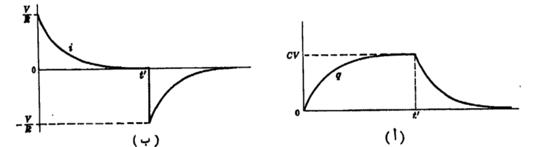
$$q_0 = 0 = c(1) + CV \quad \text{أو} \quad c = -CV \qquad (٣٥)$$

وبالتعويض عن قيمة c هذه فى المعادلة (٣٤) نحصل على

$$q = CV(1 \quad e^{-t/RC}) \qquad (٣٦)$$

والشحنة العابرة ذات ارتفاع أسى وقيمتها النهائية هى CV . وعلى ذلك فإنه بتحليل دائرة اضمحلال كالموضحة فى الشكل ١٦–١٠ على أساس الشحنة فإنه ينتج لدينا شحنة اضمحلال من القيمة CV حسب المعادلة .

$$q = CVe^{-t/RC}$$



شكل ١٦ — ١٣

يوضح الشكل ١٦–١٣ (أ) دالتى الشحنة فى حالتى الارتفاع والاضمحلال ، كما يوضح الشكل ١٦–١٣ (ب) دالتى التيار المناظرتين . وحيث أن الشحنة يجب أن تكون دالة متصلة فإن $q = CV$ عندما $(-)\,t'$ و $(+)\,t'$ بينما $i = 0$ عند $(-)\,t'$ ويساوى $-\,V/R$ عند $(+)\,t'$.

دائرة RLC فى الحالة العابرة :

ينتج عن تطبيق قانون كيرشوف للجهد على دائرة RLC على التوالى والموضحة فى الشكل ١٦–١٤ المعادلة التكاملية التفاضلية التالية .

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \qquad (٣٨)$$

وبالتفاضل نحصل على .

شكل ١٦ — ١٤

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)i = 0 \quad \text{أو} \quad L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \qquad (٣٩)$$

وهذه المعادلة التفاضلية الخطية والتي من الرتبة الأولى هي من النوع المتجانس وحلها الخاص يساوى صفرا . يمكن أن تأخذ الدالة المتممة ثلاث صور مختلفة تعتمد على القيم النسبية لكل من R و L و C . إن معاملات المعادلة المميزة $D^2 + (R/L)D + 1/LC = 0$ ثابتة وجذرا المعادلة هما .

$$D_1 = \frac{-R/L + \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2} \quad , \quad D_2 = \frac{-R/L - \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2} \qquad (٤٠)$$

بوضع $\alpha = -R/2L$ و $\beta = \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$ نجد أن

$$D_1 = \alpha + \beta \quad ; \quad D_2 = \alpha - \beta \qquad (٤١)$$

والمقدار الموجود تحت الجذر لـ β يمكن أن يكون موجبا أو صفرا أو سالبا ولذلك فإن الحل يكون أما زائد المضاءلة أو حرج المضاءلة أو ناقص المضاءلة (متذبذب) .

الحالة ١ : $(R/2L)^2 > 1/LC$. الجذران D_1 و D_2 حقيقيان وغير متساويان وينتج عنهما حالة زيادة المضاءلة . إذن المعادلة (٣٩) يمكن أن تكتب فى صيغة حاصل ضرب .

$$[D - (\alpha + \beta)][D - (\alpha - \beta)]i = 0 \qquad (٤٢)$$

والتيار هــو

$$i = c_1 e^{(\alpha+\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-\beta)t} \quad \text{أو} \quad i = e^{\alpha t}(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}) \qquad (٤٣)$$

الحالة ٢ : $(R/2L)^2 = 1/LC$. الجذران D_1 و D_2 متساويان والحل هو حالة التضاؤل الحرج وتكتب المعادلة (٣٩) فى صيغة حاصل ضرب .

$$(D - \alpha)(D - \alpha)i = 0 \qquad (٤٤)$$

والحل هــو

$$i = e^{\alpha t}(c_1 + c_2 t) \qquad (٤٥)$$

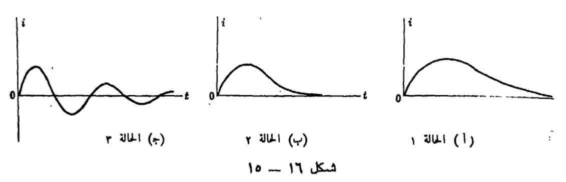
الحالة ٣ : $(R/2L)^2 < 1/LC$. الجذران D_1 و D_2 مترافقان مركبان والحل هو حالة التضاؤل الناقص أو المتذبذب وبتعريف $\beta = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$ مع ترك α بتعريفها السابق فإن المعادلة باستخدام المؤثرات تكتب على صيغة حاصل ضرب .

$$[D - (\alpha + j\beta)][D - (\alpha - j\beta)]i = 0 \qquad (٤٦)$$

والحل هــو

$$i = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \qquad (٤٧)$$

يحتوى التيار فى كل الحالات على العامل $e^{\alpha t}$ وحيث أن $\alpha = -R/2L$ فإن قيمة التيار النهائية تساوى صفراً ، وهذا يؤكد أن الدالة المتممة تضمحل فى وقت قصير نسبيا . فى الشكل ١٦–١٥ رسمت الحالات الثلاث عندما كانت القيمة الابتدائية مساوية للصفر والميل الأساسى موجبا .



(أ) الحالة ١ (ب) الحالة ٢ (ج) الحالة ٣

شكل ١٦ — ١٥

التيارات المترددة العابرة

التيارات الجيبية العابرة فى دائرة RL

يؤثر على دائرة RL الموضحة فى الشكل ١٦–١٦ عند غلق المفتاح جهد جيبى . يمكن لدالة الجهد أن تؤثر عند أية نقطة فى الفترة من لحظة غلق المفتاح ، وعلى هذا فإن زاوية الطور φ تأخذ القيم من $0 \rightarrow 2\pi$ rad/sec وينتج من تطبيق قانون كيرشوف للجهد المعادلة التالية

$v = V_{max} \sin(\omega t + \varphi)$ ، i ، R ، L

شكل ١٦ — ١٦

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_{max}\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{أو} \quad \left(D + \frac{R}{L}\right)i = \frac{V_{max}}{L}\sin(\omega t + \varphi) \qquad (٤٨)$$

والدالة المتممة هى $i_c = ce^{-(R/L)t}$ والحل الخاص هــو

$$i_p = e^{-(R/L)t}\int e^{(R/L)t}\frac{V_{max}}{L}\sin(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\sin(\omega t + \varphi - \tan^{-1}\omega L/R)$$

(٤٩)

والحل التام هو

$$i = i_c + i_p = ce^{-(R/L)t} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\sin(\omega t + \varphi - \tan^{-1}\omega L/R)$$

ويمنع الحث أى تغيير فجائى فى التيار وحيث أنه قبل غلق المفتاح كان التيار مساويا للصفر أى أن $i_0 = 0$. إذن عند

$$i_0 = 0 = c(1) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\sin(\varphi - \tan^{-1}\omega L/R \quad \text{و} \quad c = \frac{-V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\sin(\varphi - \tan^{-1}\omega L/R)$$

(٥٠)

وبالتعويض فى (٤٩) فإن التيار يكون

$$i = e^{-(R/L)t}\left[\frac{-V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\sin(\varphi - \tan^{-1}\omega L/R)\right] + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\sin(\omega t + \varphi - \tan^{-1}\omega L/R)$$

يحتوي الجزء الأول من المعادلة (٥٠) على العامل $e^{-(R/L)t}$ الذى تساوى قيمته الصفر فى فترة زمنية قصيرة نسبيا . والتعبير الموجود بين القوسين هو ببساطة ثابت معقد إلى حد ما . وتعتمد قيمة هذا الثابت على الزمن فى دورة φ الذى يغلق عنده المفتاح . وإذا كان $(\varphi - \tan^{-1} \omega L/R) = n\pi$ حيث $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ فإن التيار يساوى صفرا ويذهب التيار مباشرة إلى الحالة المستقرة . وإذا كان $(\varphi - \tan^{-1} \omega L/R) = (1 + 2n)\pi/2$ فإن تيار العبور يكون عند قيمته العظمى الممكنة .

الجزء الثانى من المعادلة (٥٠) هو التيار فى الحالة المستقرة وهو لاحق للجهد المؤثر بالزاوية $\tan^{-1} \omega L/R$ وهذا الحل الخاص الذى حصلنا عليه عن طريق التكامل يمكن الحصول عليه بطريقة المعاملات غير المحددة .

والطريقة صالحة عندما تكون الدالة المؤثرة دالة جيبية أو جيب تمامية أو أسية ، وذلك لأن التفاضل المتكرر لهذه الدوال ينتج عنه نفس مجموعة الدوال . ولتطبيق هذه الطريقة على المعادلة (٤٨) حيث الطرف الأيمن يساوى $V_{max} \sin(\omega t + \varphi)$ فإننا نفرض تيارا خاصا .

$$i_p = A \cos(\omega t + \varphi) + B \sin(\omega t + \varphi) \qquad (٥١)$$

حيث A و B ثابتان . إذن المشتقة الأولى هى

$$i'_p = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) + B\omega \cos(\omega t + \varphi) \qquad (٥٢)$$

وبالتعويض عن i_p و i'_p فى المعادلة (٤٨) نحصل على

$$\{-A\omega \sin(\omega t + \varphi) + B\omega \cos(\omega t + \varphi)\} + \frac{R}{L}\{A \cos(\omega t + \varphi) + B \sin(\omega t + \varphi)\} = \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t + \varphi) \qquad (٥٣)$$

وبتجميع معاملات الحدود المتشابهة ينتج .

$$(-A\omega + BR/L) \sin(\omega t + \varphi) + (B\omega + AR/L) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t + \varphi) \qquad (٥٤)$$

والآن بمساواة معاملات الحدود المتشابهة ينتج معادلتين فى A و B .

$$B\omega + AR/L = 0 \quad \text{و} \quad -A\omega + BR/L = V_{max}/L \qquad (٥٥)$$

ومنهما نجد أن

$$B = \frac{RV_{max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{و} \quad A = \frac{-\omega L V_{max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad (٥٦)$$

وبالتعويض عن قيمتى A و B فى المعادلة (٥١) يكون التيار الخاص هو

$$i_p = \frac{-\omega L V_{max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{RV_{max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \varphi) \qquad (٥٧)$$

أو

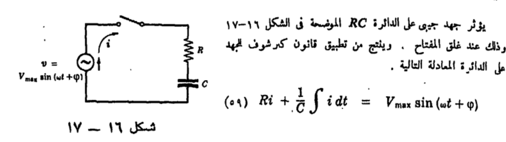
$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi - \tan^{-1} \omega L/R) \qquad (٥٨)$$

وهو نفس الحل الخاص الذى حصلنا عليه بالتكامل .

التيارات العابرة الجيبية فى دائرة RC

يؤثر جهد جيبى على الدائرة RC الموضحة فى الشكل ١٦-١٧ وذلك عند غلق المفتاح . وينتج من تطبيق قانون كرشوف للجهد على الدائرة المعادلة التالية .

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = V_{max}\sin(\omega t + \varphi) \quad (٥٩)$$



شكل ١٦ — ١٧

وبالتفاضل واستخدام الترميز بالمؤثرات نحصل على

$$\left(D + \frac{1}{RC}\right)i = \frac{\omega V_{max}}{R}\cos(\omega t + \varphi) \quad (٦٠)$$

والدالة المتممة هى

$$i_c = ce^{-t/RC} \quad (٦١)$$

والحل الخاص الذى نحصل عليه عن طريق التكامل أو طريق المعاملات غير المحددة هو

$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}\sin(\omega t + \varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR) \quad (٦٢)$$

إذن الحل التام هـــو

$$i = ce^{-t/RC} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}\sin(\omega t + \varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR) \quad (٦٣)$$

لتعيين الثابت c نضع $t = 0$ فى المعادلة (٥٩) ، فيكون التيار الابتدائى هو $i_0 = \frac{V_{max}}{R}\sin\varphi$ وبالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (٦٣) مع وضع $t = 0$ نحصل على

$$\frac{V_{max}}{R}\sin\varphi = c(1) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}\sin(\varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR) \quad (٦٤)$$

أو

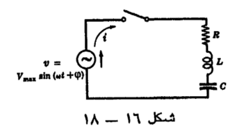
$$c = \frac{V_{max}}{R}\sin\varphi - \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}\sin(\varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR) \quad (٦٥)$$

بالتعويض عن c من (٦٥) فى (٦٣) ينتج التيار التام

$$i = e^{-t/RC}\left[\frac{V_{max}}{R}\sin\varphi - \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}\sin(\varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR)\right] + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}\sin(\omega t + \varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR) \quad (٦٦)$$

والحد الأول هو تيار العبور المضمحل بعامل $e^{-t/RC}$. والكمية الداخلية والتى بين قوسين هى كمية ثابتة . والحد الثانى هو تيار الحالة المستقرة وهو سابق للجهد المؤثر بزاوية $\tan^{-1} 1/\omega CR$.

التيارات العابرة الجيبية فى دائرة RLC



شكل ١٦ — ١٨

يؤثر على دائرة التوالى RLC الموضحة فى الشكل ١٦ — ١٨ جهد جيبى وذلك عند غلق المفتاح . والمعادلة الناتجة هى

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V_{max}\sin(\omega t+\varphi) \qquad (٦٧)$$

وبالتفاضل واستخدام الترميز بالمؤثرات نحصل على

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)i = \frac{\omega V_{max}}{L}\cos(\omega t+\varphi) \qquad (٦٨)$$

نحصل على الحل الخاص بطريقة المعاملات غير المحددة كما يلى . نضع أولا $i_p = A\cos(\omega t+\varphi) + B\sin(\omega t+\varphi)$ ثم نحسب i'_p ثم نعوض عن i'_p و i''_p فى المعادلة (٦٧) . ونحصل على قيم A و B . بمساواة معاملات الحدود المشابهة كما فعلنا سابقاً فى حالة تيار الانتقال (أو العبور) الجيبى لدائرة RL . وبالتعبير عن النتيجة بدالة جيبية واحدة يكون الحل الخاص هو

$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}}\sin\left(\omega t + \varphi + \tan^{-1}\frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right) \qquad (٦٩)$$

والدالة المتممة مطابقة لما فى حالة دائرة التوالى RLC بتيار مستمر السابق دراسته ، حيث كانت النتيجة تضاؤلا زائدا أو تضاؤلا حرجاً أو تضاؤلا متذبذباً حسب قيم R و L و C .

الحالة ١ : $(R/2L)^2 = 1/LC$ الجذران حقيقيان وغير متساويين وتنتج بذلك حالة تضاؤل زائدة .

$D_1 = \alpha + \beta$ و $D_2 = \alpha - \beta$ حيث $\alpha = -R/2L$ و $\beta = \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$

والحل التام هو

$$i = e^{\alpha t}(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}}\sin\left(\omega t + \varphi + \tan^{-1}\frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right) \qquad (٧٠)$$

الحالة ٢ : $(R/2L)^2 > 1/LC$. الجذران حقيقيان ومتساويان وتنتج بذلك حالة تضاؤل حرج ، والتيار التام هو

$$i = e^{\alpha t}(c_1 + c_2 t) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}}\sin\left(\omega t + \varphi + \tan^{-1}\frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right) \qquad (٧١)$$

الحالة ٣ : $(R/2L)^2 < 1/LC$ الجذران مترافقان مركبان وتنتج عن ذلك حالة التذبذب والتيار التام هو

$$i = e^{\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin\left(\omega t + \varphi + \tan^{-1}\frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}\right) \quad (٧٢)$$

حيث $\beta = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$.

يتطابق الحل الخاص لكل المعادلات (٧٠) و (٧١) و (٧٢) بينما يختلف تيار العبور المعطى بالدالة المتممة فى كل حالة . فمثلا فى الحالة ٣ يحتوى تيار العبور على مجموعة دوال جيبية ترددها β rad/sec ، وهذا التردد يختلف عموماً عن تردد الحل الخاص ω . وبالتالى لا يمكن استنتاج ظهور تيار خلال فترة العبور ، وعادة ما يأخذ شكل غير منتظم تماماً . وبمجرد أن يصبح تيار العبور مساوياً للصفر بفعل عامل الاضمحلال ، فإن التيار يصبح إذن سابقاً أو لاحقاً للجهد المؤثر تبعاً للقيم النسبية للممانعات $1/\omega C$ و ωL بزاوية $\tan^{-1}(1/\omega C - \omega L)/R$

تيارات الانتقال لشبكتين فرعيتين

ينتج عن تطبيق قانون كيرشوف للجهد على شبكتين فرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٦ — ١٩ المعادلتان التفاضليتان الآتيتان :

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 &= V \\ R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} &= V \end{aligned} \quad (٧٣)$$

شكل ١٦ — ١٩

باستخدام الترميز بالمؤثرات وإعادة الترتيب نحصل على

$$\begin{aligned} (D + R_1/L_1) i_1 + (R_1/L_1) i_2 &= V/L_1 \\ (R_1/L_2) i_1 + \left(D + \frac{R_1 + R_2}{L_2}\right) i_2 &= V/L_2 \end{aligned}$$

أو

$$\begin{bmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/L_1 \\ V/L_2 \end{bmatrix} \quad (٧٤)$$

وللحصول على معادلة فى i_1 لاتعتمد على i_2 فإننا نستخدم المحددات ، نكتب

$$\begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} i_1 = \begin{vmatrix} V/L_1 & R_1/L_1 \\ V/L_2 & D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} \quad (٧٥)$$

لنفك محددة الطرف الأيسر ونرتبها على حسب قوى D التنازلية . ويظهر الحد $D(V/L_1)$ فى مفكوك محددة الطرف الأيمن ، ولكن حيث أن $D = d/dt$ و V/L_1 ثابت فإن قيمة هذا الحد تساوى صفراً .

$$\left[D^2 + \left(\frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2}\right) D + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}\right] i_1 = V R_2 / L_1 L_2 \quad (٧٦)$$

والمعادلة المميزة هي على الصيغة $D^2 + AD + B = 0$ وحيث أنه فى هذه الحالة $A^2 - 4B > 0$ لجميع قيم ثوابت الدائرة (فيما عدا الحالة التى يكون فيها L_1 أو L_2 مساوياً للصفر) فالدالة المتممة هي على الصورة المعطاة فى المعادلة (٤٣) . حيث أن الدالة المؤثرة ثابتة فإن الحل الخاص هو الثابت الذى يحقق المعادلة

$$\left(\frac{R_1R_2}{L_1L_2}\right)i_{1p} = VR_2/L_1L_2 \quad \text{أو} \quad i_{1p} = V/R_1 \qquad (٧٧)$$

والآن بتطبيق نفس الطرق على i_2 نحصل على

$$\begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \dfrac{R_1+R_2}{L_2} \end{vmatrix} i_2 = \begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & V/L_1 \\ R_1/L_2 & V/L_2 \end{vmatrix} \qquad (٧٨)$$

وبعد فك المحددتين نحصل على

$$\left[D^2 + \left(\frac{R_1L_1 + R_2L_1 + R_1L_2}{L_1L_2}\right)D + \frac{R_1R_2}{L_1L_2}\right]i_2 = 0$$

والمعادلة المميزة هي نفسها كما فى المعادلة (٧٦) ، وبالتالى فإن الدوال المتممة متطابقة . وحيث أن المعادلة من النوع المتجانس فإن الحل الخاص للتيار i_2 يساوى صفراً .

وبدراسة الدائرة نجد أن هذا متوقع تماماً ، ذلك لأنه فى الحالة المستقرة يعمل L_1 كدائرة مغلقة على الفرع R_2L_2 وبذلك يحمل التيار بعيداً عن هذا الفرع .

المقاومة R_1 هى المعاوقة النهائية فى الحالة المستقرة وينتج عن ذلك أن $i_1 = V/R_1$ كما فى المعادلة (٧٧) .

مسائل محلولة

١٦ – ١ دائرة RL على التوالى تتكون من $R = 50\ \Omega$ ، $L = 10\ \text{H}$ يؤثر عليها جهد ثابت $V = 100\ \text{V}$ عندما $t = 0$ وذلك عند غلق المفتاح – أوجد (أ) معادلات كل من i و v_R و v_L ، (ب) التيار عندما $t = 0.5$ Seconds (جـ) الزمن الذى عنده $v_R = v_L$.

(أ) المعادلة التفاضلية للتيار المعطى هى

$$50i + 10\frac{di}{dt} = 100 \quad \text{أو} \quad (D+5)i = 10 \qquad (١)$$

والحل التام هو

$$i = i_c + i_p = ce^{-5t} + 2 \qquad (٢)$$

عند $t = 0$ نجد أن $i_0 = 0$ أى أن $0 = c\ (1) + 2$ او $c = -2$. إذن

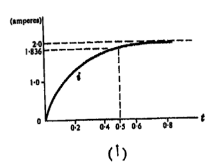
$$i = 2(1 - e^{-5t}) \text{ amperes}$$

ويوضح الشكل ١٦ – ٢٠ (أ) هذه العلاقة .

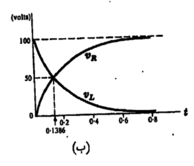
والجهدان المناظران عبر عنصرى الدائرة هما

$$v_R = Ri = 100(1 - e^{-5t}) \text{ volts} \quad \text{و} \quad v_L = L\frac{di}{dt} = 100e^{-5t} \text{ volts} \qquad (٤)$$

ويوضح الشكل ١٦ – ٢٠ (ب) هاتين العلاقتين



(أ)



(ب)

شكل ١٦ – ٢٠

(ب) نضع فى المعادلة (٣) $t = 0.5$ Seconds فنحصل على . $i = 2(1 - e^{-5(0.5)}) = 2(1 - 0.082) = 1.836$ A

(جـ) عندما $v_R = v_L$ فإن كلا منهما يجب أن يساوى 50 V ، وحيث أن الجهد المؤثر يساوى 100 فإننا نضع أيامن v_R أو v_L يساوى 50 V ثم نحل المعادلة للحصول على t. من المعادلة (٤) $v_L = 50 = 100e^{-5t}$ volts

إذن $e^{-5t} = 0.5$ أو $5t = 0.693$ و $t = 0.1386$ s .

١٦ – ٢ بالإشارة إلى المسألة ١٦ – ١ أوجد معادلتى p_R و p_L ثم بين أن القدرة فى الحث تعبر عن الطاقة المخزونة فى المجال المغناطيسى فى الحالة المستقرة .

باستخدام التيار والجهد الذى حصلنا عليهما فى المسألة ١٦ – ١ فإن معادلات القدرة اللحظية تكون

$$p_R = v_R i = 100(1 - e^{-5t})\, 2(1 - e^{-5t}) = 200(1 - 2e^{-5t} + e^{-10t}) \text{ watts}$$
$$p_L = v_L i = 100e^{-5t}\, 2(1 - e^{-5t}) = 200(e^{-5t} - e^{-10t}) \text{ watts}$$
$$p_T = p_R + p_L = 200(1 - e^{-5t}) \text{ watts}$$

والطاقة المخزونة فى الحالة المستقرة هى $W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(10)(2)^2 = 20$ joules.

وتكامل p_L من $t = 0$ إلى $t = \infty$ هو $W = \int_0^\infty 200(e^{-5t} - e^{-10t})\, dt = 20$ joules.

١٦ - ٣ فى دائرة التوالى الموضحة فى الشكل ١٦ - ٢١ إذا أغلق المفتاح إلى الموضع 1 عندما كانت $t = 0$ وبذلك يؤثر مصدر مقدار 100 V على الفرع RL ، وعندما كانت $t = 500\ \mu s$ يتحرك المفتاح إلى الموضع 2 . فأوجد معادلتى التيار فى كلتا الفترتين وارسم تيار العبور .

عندما كان المفتاح فى الموضع 1 فإن المعادلة هى

$$100i + 0{\cdot}2\frac{di}{dt} = 100 \qquad (D + 500)i = 500 \qquad (١)$$

والتيار التام هو :

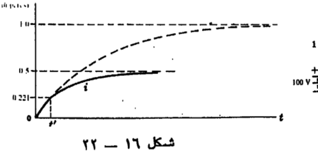
$$i = c_1 e^{-500t} + 1{\cdot}0 \text{ amperes} \qquad (٢)$$

وعندما $t = 0$ كانت $i = 0$ وبتطبيق الشرط الابتدائى على المعادلة (٢) نجد أن $0 = c_1(1) + 1.0$ أو $c_1 = -1.0$. إذن التيار هو

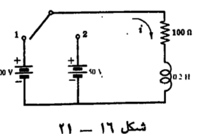
$$i = 1{\cdot}0(1 - e^{-500t}) \text{ amperes} \qquad (٣)$$

والآن عند زمن قدرة $500\ \mu\ sec$ فإن التيار يكون

$$i = 1{\cdot}0(1 - e^{-500(500\times10^{-6})}) = 1{\cdot}0(1 - 0{\cdot}779) \quad 0{\cdot}221\ A \qquad (٤)$$



شكل ١٦ — ٢٢



شكل ١٦ — ٢١

عندما يكون المفتاح فى الموضع 2 فإن الجهد المؤثر يكون 50 V بنفس قطبية المصدر 100 V وتكون المعادلة هى

$$(D + 500)i = 250 \quad \text{أو} \quad 100i + 0{\cdot}2\frac{di}{dt} = 50 \qquad (٥)$$

ومنها نحصل على

$$i = c_2 e^{-500(t-t')} + 0{\cdot}5 \text{ amperes} \qquad (٦)$$

حيث $t' = 500\mu s$. والآن بوضع $t = t'$ فى المعادلة (٦) فإن التيار يكون 0.221 A كما فى المعادلة (٤).

$$i = 0{\cdot}221 = c_2(1) + 0{\cdot}5 \quad \text{و} \quad c_2 = -0{\cdot}279$$

وعندما $t < t'$ فإن

$$i = -0{\cdot}279 e^{-500(t-t')} + 0{\cdot}5 \text{ amperes} \qquad (٧)$$

وتطبق المعادلة (٣) فى الفترة $0 < t < t'$ وفى هذه الحالة فإن تيار العبور الموضح بالنقط فى الشكل ١٦ - ٢٢ يقترب من قيمته فى الحالة المستقرة وهى 1.0 . عند t' يكون التيار 0.221 A والمفتاح فى الموضع 2 وفى هذه الحالة نطبق المعادلة (٧) عندما $t < t'$ والقيمة النهائية للتيار فى هذه الحالة تساوى 0.5 A كما هو موضح .

١٦ - ٤ كرر المسألة ١٦ - ٣ مع عكس قطبية المصدر 50 V .

الجزء الأول من تيار العبور عندما كان المفتاح فى الموضع (1) هو نفسه الذى حصلنا عليه فى المسألة ١٦ - ٣ : $i = 1{\cdot}0(1 - e^{-500t})$ و $i = 0.221$ A عندما $t = 500\ \mu s$.

وبعكس قطبية المصدر 50 V تنتج المعادلة التالية

$$100i + 0{\cdot}2\frac{di}{dt} = -50 \quad \text{أو} \quad (D + 500)i = -250 \qquad (١)$$

وحلها هو

$$i = c\, e^{-500(t-t')} - 0{\cdot}5 \text{ amperes} \qquad (٢)$$

والآن عندما $t = t'$ فإن التيار يكون 0.221 A

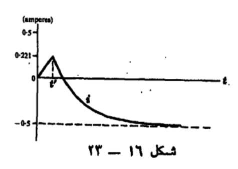
وبالتعويض فى المعادلة (٢) نجد أن

$$0.221 = c\ (1) - 0.5 \quad \text{أو} \quad c = 0.721$$

إذن معادلة التيار عندما $t > t'$ هى

$$i = 0{\cdot}721\, e^{-500(t-t')} - 0{\cdot}5 \text{ amperes}$$

ويوضح الشكل ١٦ - ٢٣ تيار العبور بقيمته النهائية 0.5 A — ذلك لأن اتجاه المصدر 50 V عكس الاتجاه الموجب المفروض للتيار i .



شكل ١٦ — ٢٣

١٦ - ٥ دائرة توالى تتكون من R و C فيها $R = 5000\,\Omega$ و $C = 20\ \mu F$ يؤثر عليها جهد ثابت $V = 100$ V عند $t = 0$ والمكثف لايحمل شحنة ابتدائية . أوجد معادلات i و v_R و v_C .

عند غلق المفتاح تكون المعادلة هى

$$5000i + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int i\, dt = 100 \qquad (١)$$

وبالتفاضل واستخدام رموز المؤثرات نحصل على

$$(D+10)i = 0 \quad \text{وحلها هو} \quad i = c\, e^{-10t} \qquad (٢)$$

بوضع $t = 0$ فى المعادلة (١) نحصل على التيار الإبتدائى $i_0 = 100/5000 = 0{\cdot}02$ A وبالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (٢) نحصل على $c = 0.02$. إذن معادلة التيار هى

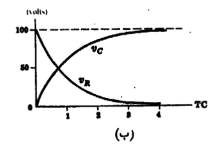
$$i = 0{\cdot}02\, e^{-10t} \text{ amperes} \qquad (٣)$$

وجهدا العبور عبر عنصرى الدائرة هما

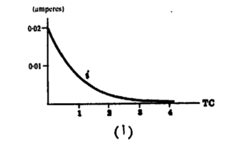
$$v_R = Ri = 5000(0{\cdot}02\, e^{-10t}) = 100\, e^{-10t} \text{ volts}$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int i\, dt = \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int 0{\cdot}02\, e^{-10t}\, dt = 100(1 - e^{-10t}) \text{ volts}$$

يوضح الشكل ١٦ — ٢٤ تيار وجهدى العبور . فى الحالة المستقرة $v_R = 0$ ، $v_C = 100$ V .



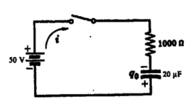
(ب)



(أ)

شكل ١٦ — ٢٤

١٦ — ٦ إذا كان على المكثف 20 μF فى دائرة RC الموضحة فى الشكل ١٦ — ٢٥ شحنة ابتدائية $q_0 = 500\ \mu$ Coulombs وذلك بالقطبية الموضحة فى الرسم . وعند $t = 0$ أغلق المفتاح وبالتالى أثرنا بالجهد الثابت $V = 50$ V . فأوجد تيار العبور .



شكل ١٦ — ٢٥

عند غلق المفتاح تكون المعادلة هى

$$1000i + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int i\, dt = 50 \quad \text{أو} \quad (D+50)i = 0 \qquad (١)$$

والحل هو

$$i = c\,e^{-50t} \text{ amperes} \qquad (٢)$$

والآن فإن المصدر 50 V يحرك تياراً في الاتجاه الموضح بالرسم وينتج عن ذلك شحنة موجبة على اللوح العلوى للمكثف . ينتج عن الشحنة الأساسية على المكثف q_0 جهد مقداره $V_0 = q_0/C = (500 \times 10^{-6})/(20 \times 10^{-6}) = 25 \text{ volts}$ وهو أيضاً يرسل تياراً فى اتجاه i كما هو موضح وعلى هذا عندما $t = 0$ فإن التيار الأساسى يكون $i_0 = (V + q_0/C)/R = (50 + 25)/1000 = 0.075$ A وبالتعويض فى المعادلة (٢) نجد أن $c = 0.075$

إذن $i = 0.075 e^{-50t}$ amperes

١٦ – ٧ كرر المسألة ١٦ – ٦ باستخدام الشحنة كأساس للعبور .

معادلة الشحنة الأساسية هى

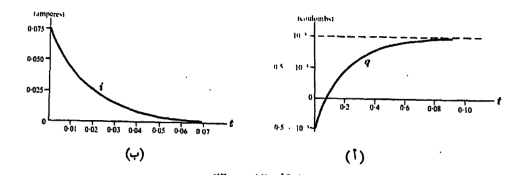
$$1000\frac{dq}{dt} + \frac{q}{20 \times 10^{-6}} = 50 \quad \text{أو} \quad (D + 50)q = 0.05 \qquad (١)$$

وحلها هو

$$q = c\,e^{-50t} + 10^{-3} \text{ coulombs} \qquad (٢)$$

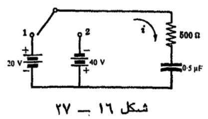
عند $t = 0$ يكون على المكثف شحنة موجبة مقدارها 0.5×10^{-3} coulombs على اللوح السفلى . قطبية الشحنة المترسبة أثناء فترة العبور موجبة على اللوح العلوى . إذن بوضع $q_0 = -0.5 \times 10^{-3}$ و $t = 0$ فى المعادلة (٢) نجد أن $c = -1.5 \times 10^{-3}$ إذن $q = -1.5 \times 10^{-3} e^{-50t} + 10^{-3}$ ومعادلة تيار العبور هى $i = dq/dt = 0.075 e^{-50t}$ amperes .

يبين منحنى العبور الموضح فى الشكل ١٦ – ٢٦ (أ) أنه يوجد على اللوح السفلى للمكثف شحنة أساسية موجبة مقدارها 0.5×10^{-3} coulombs وشحنة نهائية مقدارها 1.0×10^{-3} coulombs بقطبية موجبة على اللوح العلوى . يوضح الشكل ١٦ – ٢٦ (ب) تيار العبور $i = dq/dt$.



شكل ١٦ — ٢٦

١٦ — ٨ فى دائرة RC الموضحة فى الشكل ١٦ — ٢٧ أغلق المفتاح عند الموضع 1 عندما كانت $t = 0$ وبعد 1 TC تحرك إلى الموضع 2 . أوجد تيار العبور التام .



شكل ١٦ — ٢٧

عندما كان المفتاح فى الموضع 1 فإن حل المعادلة التفاضلية التى نحصل عليها بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على الدائرة هو

$$i = c_1 e^{-t/RC} = c_1 e^{-4000t} \text{ amperes} \qquad (١)$$

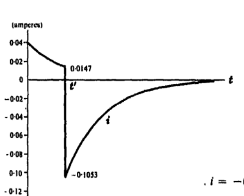
عند $t = 0$ نجد أن $i_0 = V/R = 20/500 = 0{\cdot}04$ A . وبالتعويض فى المعادلة (١) نحصل على $c_1 = 0.04$ والتيار فى الفترة $0 < t < 1$ TC هو

$$i = 0{\cdot}04\, e^{-4000t} \text{ amperes}$$

ويستمر هذا العبور إلى $1\text{ TC} = RC = 500(0{\cdot}5 \times 10^{-6}) = 250$ microseconds ، وعند هذه النقطة فإن قيمة التيار تكون $i = 0{\cdot}04e^{-1} = 0{\cdot}0147$ A .

عندما يتحرك المفتاح إلى الموضع 2 يكون على لوحى المكثف شحنة ينتج عنها جهد مقداره $v_C = 20(1 - e^{-1}) = 12{\cdot}65$ volts ويحرك كل من هذا الجهد والمصدر 40 V تيارا فى الاتجاه المضاد للتيار الناتج عن المصدر 20 V . بوضع $t' = 1TC$ فإن معادلة التيار لفترة العبور الثانية هى

$$i = c_2 e^{-4000(t-t')} \text{ amperes} \qquad (٣)$$



شكل ١٦ — ٢٨

وعند $t = t'$ فإن $i = -(40 + 12{\cdot}65)/500 = -0{\cdot}1053$ A . وبالتعويض فى المعادلة (٣) نجد أن $c_2 = -0.1053$ والتيار هو

$$i = -0{\cdot}1053\, e^{-4000(t-t')} \text{ amperes} \qquad (٤)$$

ويوضح الشكل ١٦ — ٢٨ تيار العبور التام . وعند 1 TC يكون التيار نهاية صغرى قيمتها -0.1053 A .

١٦ — ٩ أوجد شحنة العبور فى المسألة ١٦ — ٨ ثم فاضلها لتحصل على التيار .

معادلة الشحنة الأساسية عندما كان المفتاح فى الموضع 1 هى

$$500\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0{\cdot}5 \times 10^{-6}} = 20 \quad \text{أو} \quad (D + 4000)q = 0{\cdot}04 \qquad (١)$$

والحل هو

$$q = c_1 e^{-4000t} + 10 \times 10^{-6} \text{ coulombs} \qquad (٢)$$

عند $t = 0$ فإن $q_0 = 0$ وبتطبيق هذا الشرط الإبتدائى على المعادلة (٢) نحصل على $c_1 = -10 \times 10^{-6}$ وعلى هذا فإن

$$q = 10 \times 10^{-6}(1 - e^{-4000t}) \text{ coulombs} \qquad (٣)$$

وتطبق هذه المعادلة فى الفترة $0 < t < t'$ حيث $t' = 1\ \text{TC}$. وعند $1\ \text{TC}$ تكون الشحنة على المكثف هى

$$q = 10 \times 10^{-6}(1 - e^{-1}) = 6{\cdot}32 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$$

عندما يكون المفتاح فى الموضع 2 تكون المعادلة التفاضلية هى

$$500\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0{\cdot}5 \times 10^{-6}} = -40 \quad \text{أو} \quad (D + 4000)q = -0{\cdot}08 \qquad (٤)$$

وحلها هو

$$q = c_2 e^{-4000(t-t')} - 20 \times 10^{-6} \text{ coulombs} \qquad (٥)$$

والآن نعين c_2 بالتعويض عن قيمة q عند $1\ \text{TC}$ ووضع $t = 1\ \text{TC}$ وذلك فى المعادلة (٥) . إن

$6{\cdot}32 \times 10^{-6} = c_2(1) - 20 \times 10^{-6}$ أو $c_2 = 26{\cdot}32 \times 10^{-6}$ إذن

$$q = 26{\cdot}32 \times 10^{-6} e^{-4000(t-t')} - 20 \times 10^{-6} \text{ coulombs} \qquad (٦)$$

ويوضح الرسم ١٦ — ٢٩ شحنة العبور التامة .

شكل ١٦ — ٢٩

ونحصل على تيار العبور المناظر بتفاضل المعادلتين (٣) ، (٦) . وعلى هذا فإنه فى الفترة $0 < t < t'$ يكون التيار هو

$$i = \frac{d}{dt}\{10 \times 10^{-6}(1 - e^{-4000t})\} = 0{\cdot}04\, e^{-4000t} \text{ amperes}$$

وعندما $t > t'$ فإن

$$i = \frac{d}{dt}\{26{\cdot}32 \times 10^{-6} e^{-4000(t-t')} - 20 \times 10^{-6}\} = -0{\cdot}1053\, e^{-4000(t-t')} \text{ amperes}$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها بالمعادلتين (٢) ، (٤) فى المسألة ١٦ — ٨ .

١٦ – ١٠ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 3000\ \Omega$ و $L = 10\ \text{H}$ و $C = 200\mu\text{F}$. يؤثر عليها جهد ثابت $V = 50\ \text{V}$ عند $t = 0$. أوجد تيار العبور والقيمة العظمى للتيار علماً بأنه لاتوجد شحنة ابتدائية على المكثف .

بعد غلق المفتاح تكون المعادلة هى

$$3000i + 10\frac{di}{dt} + \frac{1}{200 \times 10^{-6}}\int i\,dt = 50 \quad \text{أو} \quad (D^2 + 300D + 500)i = 0 \qquad (١)$$

وجذرا المعادلة المميزة هما $D_1 = -298.3$ و $D_2 = -1.67$

و

$$i = c_1 e^{-1.67t} + c_2 e^{-298.3t} \text{ amperes} \qquad (٢)$$

ولحساب قيمتى c_1 و c_2 فإننا نستخدم الشروط الابتدائية . حيث أن دائرة التوالى تحتوى على حث فإن دالة التيار يجب أن تكون متصلة . وحيث أن $i = 0$ عند $t = 0-$ فإن i أيضاً يساوى صفراً عند $t = 0+$. إذن من المعادلة (١) نجد أن $10\ di/dt = 50$ و $di/dt = 5$. والآن بكتابة المعادلة (٢) عند $t = 0$ نجد أن : $0 = c_1(1) + c_2(1)$ أو $c_1 + c_2 = 0$. بوضع $t = 0$ فى المشتقة الأولى للمعادلة (٢) والتعويض عن $di/dt = 5$ نحصل على $5 = -1.67c_1 - 298.3c_2$ ، وبحل المعادلتين الآتيتين المتعلقتين بالثوابت نحصل على $c_1 = 0.0168$ و $c_2 = -0.0168$ إذن

$$i = 0.0168\,e^{-1.67t} - 0.0168\,e^{-298.3t} \text{ amperes} \qquad (٣)$$

للحصول على القيمة العظمى للتيار نضع di/dt مساوية للصفر ثم نحل المعادلة للحصول على t

$$di/dt = (0.0168)(-1.67)e^{-1.67t} - (0.0168)(-298.3)e^{-298.3t} = 0 \quad \text{أو} \quad t = 0.0175\ \text{s}$$

وبالتعويض عن قيمة t هذه فى المعادلة (٣) نحصل على **0.0161A** .

١٦ – ١١ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 50\Omega$ و $L = 0.1\text{H}$ و $C = 50\ \mu\text{F}$. يؤثر عليها جهد ثابت $V = 100\ \text{V}$ عند $t = 0$. أوجد تيار العبور بفرض أن الشحنة الابتدائية على المكثف تساوى صفراً .

عند غلق المفتاح نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية :

$$50i + 0.1\frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}}\int i\,dt = 100 \quad \text{أو} \quad (D^2 + 500D + 2 \times 10^5)i = 0 \qquad (١)$$

وجذرا المعادلة المميزة هما $D_1 = -250 + j371$ و $D_2 = -250 - j371$ ، والتيار هو

$$i = e^{-250t}(c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t) \text{ amperes} \qquad (٢)$$

والتيار يساوى صفراً عند $t = 0$. إذن من المعادلة (٢) نجد أن $i_0 = 0 = (1)(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0)$ و $C_1 = 0$ والآن تصبح المعادلة (٢) على الصورة

$$i = e^{-250t}\, c_2 \sin 371t \text{ amperes} \qquad (٣)$$

بتفاضل المعادلة (٣) نجد أن

$$di/dt = c_2\{e^{-250t}(371)\cos 371t + e^{-250t}(-250)\sin 371t\} \qquad (٤)$$

عند $t = 0$ نجد من المعادلة (١) ؛ $0.1\,(di/dt) = 100$ أو $di/dt = 1000$ ، وبالتعويض فى المعادلة (٤) عند $t = 0$ نجد أن $di/dt = 1000 = c_2 371 \cos 0$ و $c_2 = 2.7$. إذن التيار المطلوب هو

$$i = e^{-250t}(2.7 \sin 371t) \text{ amperes.}$$

١٦ – ١٧ دائرة توالى تتكون من RL فيها $R = 50\ \Omega$ و $L = 0.2\text{ H}$ يؤثر عليها مصدر جهد جيبى $v = 150 \sin(500t + \varphi)$ volts عند الزمن الذى كانت عنده $\varphi = 0$. أوجد التيار التام .

عند غلق المفتاح تكون المعادلة التفاضلية هى

$$50i + 0.2\frac{di}{dt} = 150 \sin 500t \quad \text{او} \quad (D + 250)i = 750 \sin 500t \qquad (١)$$

والدالة المتممة هى $i_c = c\, e^{-250t}$

لايجاد الحل الخاص نستخدم طريقة المعاملات غير المحدودة ونفرض تياراً خاصاً

$$i_p = A \cos 500t + B \sin 500t \qquad (٢)$$

إذن

$$i_p' = -500A \sin 500t + 500B \cos 500t \qquad (٣)$$

وبالتعويض عن i و i' فى المعادلة (١) نحصل على

$$(-500A \sin 500t + 500B \cos 500t) + 250(A \cos 500t + B \sin 500t) = 750 \sin 500t$$

بمساواة معاملات $\sin 500t$ ومعاملات $\cos 500t$ نحصل على

$$-500A + 250B = 750 \quad \text{و} \quad 500B + 250A = 0 \qquad (٤)$$

وبحل هاتين المعادلتين الآنيتين نجد أن $A = -1.2$ و $B = 0.6$. إذن

$$i_p = -1.2 \cos 500t + 0.6 \sin 500t = 1.34 \sin(500t - 63.4°) \text{ amperes} \qquad (٥)$$

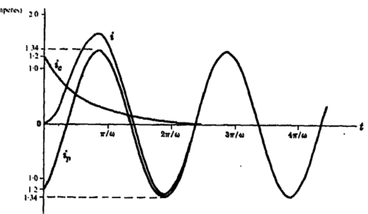
والتيار التام هو

$$i = c\, e^{-250t} + 1.34 \sin(500t - 63.4°) \text{ amperes} \qquad (٦)$$

وعند $t = 0$ نجد أن $i = 0 = c(1) + 1\cdot34 \sin(-63\cdot4^\circ)$, و $c = 1.2$. إذن

$$i = 1\cdot2\, e^{-250t} + 1\cdot34 \sin(500t - 63\cdot4^\circ) \text{ amperes} \qquad (٧)$$

يوضح الشكل ١٦ – ٣٠ ؛ i_c و i_p ومجموعهما i بعد انتهاء فترة العبور (تقريباً عندما $t = 5\,TC$) . يكون التيار جيبياً ولاحقاً للجهد المؤثر بزاوية $\theta = \tan^{-1} \omega L/R = 63\cdot4^\circ$.



شكل ١٦ — ٣٠

١٦ – ١٣ عند أى زاوية φ يجب غلق المفتاح فى الدائرة الموضحة فى المسألة ١٦ – ١٢ حتى يذهب التيار مباشرة إلى الحالة المستقرة بدون فترة عبور ؟

إذا كانت $\varphi \neq 0$ فإننا نجد من المعادلة (٦) فى المسألة ١٦ – ١٢

$$i = c\, e^{-250t} + 1\cdot34 \sin(500t + \varphi - 63\cdot4^\circ) \text{ amperes}$$

عند $t = 0$ نجد أن $0 = c(1) + 1\cdot34 \sin(\varphi - 63\cdot4^\circ)$ والآن تكون فترة العبور مساوية للصفر إذا كان الثابت $c = 0$ ؛ ويحدث هذا عندما $\varphi = (63\cdot4^\circ + n\, 180^\circ)$ حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$

١٦ – ١٤ دائرة توالى تتكون من RC فيها $R = 100\,\Omega$ و $C = 25\,\mu F$. يؤثر عليها مصدر جهد جيبى $v = 250 \sin(500t + \varphi)$ volts ، عند الزمن الذى كانت عنده $\varphi = 0^\circ$. أوجد التيار بفرض أنه لاتوجد شحنة ابتدائية على المكثف .

عند غلق المفتاح تكون المعادلة التفاضلية للدائرة هى

$$100i + \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \int i\, dt = 250 \sin 500t \quad \text{أو} \quad (D + 400)i = 1250 \cos 500t \qquad (١)$$

والدالة المتممة هى $i_c = c\, e^{-400t}$

لإيجاد التيار الخاص نضع الطرف الأيمن فى معادلة المؤثرات مساوياً الجزء الحقيقى الكمية $1250\, e^{j500t}$ ويفرض أن التيار الخاص هو

$$i_p = K e^{j500t} \text{ amperes} \quad (٢)$$

إذن

$$i'_p = j500 K e^{j500t} \text{ amperes} \quad (٣)$$

وبالتعويض عن قيمتى i و i' فى المعادلة (١) نحصل على

$$j500 K e^{j500t} + 400(K e^{j500t}) = 1250 e^{j500t} \quad (٤)$$

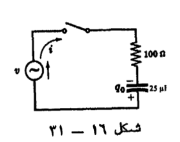
ومنها نجد أن $K = 1.955 \angle -51.3°$. نعوض بقيمة K هذه فى المعادلة (٢) ، ولكن حيث أن الجهد المحرك يساوى الجزء الحقيقى لكمية $1250 e^{j500t}$ فإن التيار الفعلى يساوى الجزء الحقيقى للمعادلة (٢) و $i_p = 1{\cdot}955 \cos(500t - 51{\cdot}3°)$ والتيار التام هو

$$i = c e^{-400t} + 1{\cdot}955 \cos(500t - 51{\cdot}3°) \text{ amperes} \quad (٥)$$

عند $t = 0$ تصبح المعادلة (١) : $100i = 250 \sin 0$ أو $i = 0$. والآن باستخدام المعادلة (٥) عند $t = 0$ نجد أن $c = -1.22$ إذن

$$i = -1{\cdot}22 e^{-400t} + 1{\cdot}955 \cos(500t - 51{\cdot}3°) = -1{\cdot}22 e^{-400t} + 1{\cdot}955 \sin(500t + 38{\cdot}7°) \text{ amperes}$$

١٦ – ١٥ فى دائرة RC الموضحة فى الشكل ١٦ – ٣١ يؤثر مصدر جهد جيبى $v = 250 \sin(500t + \varphi)$ volts وذلك بغلق المفتاح عند الزمن الذى كانت عنده $\varphi = 45°$. فإذا كانت هناك شحنة ابتدائية على المكثف مقدارها $q_0 = 5000 \times 10^{-6}$ coulombs بالقطبية الموضحة فى الرسم فأوجد التيار التام .



شكل ١٦ — ٣١

الدائرة والجهد الجيبى هما نفسهما الموجودان فى المسألة ١٦ – ١٤فيما عدا أن $\varphi = 45°$. إذن فالمعادلة التفاضلية فى صيغة المؤثرات هى

$$(D + 400)i = 1250 \cos(500t + 45°) \quad (١)$$

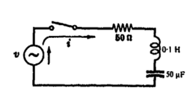
والدالة المتممة هى نفسها كما فى المسألة ١٦ – ١٤ . والتيار الخاص مزاح بزاوية $45°$ ، أى أن : $i_p = 1{\cdot}955 \sin(500t + 83{\cdot}7°)$ إذن التيار التام هو

$$i = c e^{-400t} + 1{\cdot}955 \sin(500t + 83{\cdot}7°) \text{ amperes} \quad (٢)$$

عند $t = 0$ يوجد مصدران للجهد يرسلان تياراً . الجهد المكافئ للمكثف المشحون هو :

$v = 250 \sin 45° - 176.7$ volts. والمصدر له جهد لحظى $V = q_0/C = (5000 \times 10^{-6})/(25 \times 10^{-6}) = 200$ volts
وبفحص الدائرة يتبين أن كلا الجهدين لها نفس القطبية وعلى ذلك فإن التيار الإبتدائى هو
$i_0 = (200 + 176.7)/100 = 3.77$ A والآن باستخدام المعادلة (٢) مع وضع $i = 3.77$ عند $t = 0$.
نجد أن $c = 1.83$ والتيار المطلوب هو $i = 1.83\, e^{-400t} + 1.955 \sin (500t + 83.7°)$ amperes

١٦ - ١ يؤثر على دائرة التسوالى المكونة من RLC والموضحة فى شكل ١٦ - ٣٢ مصدر جهد جيبى $v = 100 \sin (1000t + \varphi)$ volts . فإذا أغلق المفتاح عند الزمن الذى كانت فيه $\varphi = 90°$ ، فأوجد التيار بفرض أن الشحنة الإبتدائية على المكثف تساوى صفراً .



شكل ١٦ — ٣٢

بعد غلق المفتاح تكتب معادلة الدائرة على الصورة

$$50i + 0.1 \frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \int i\, dt = 100 \sin (1000t + 90°)$$

أو

$$(D^2 + 500D + 2 \times 10^5)i = 10^6 \cos (1000t + 90°) \qquad (١)$$

وجذرا المعادلة المميزة هما :

$$D_1 = -250 + j371 \quad , \quad D_2 = -250 - j371$$

التيار المتمم هو :

$$i_c = e^{-250t} (c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t)$$

والتيار الخاص الذى نحصل عليه باستخدام طريقة المسألة ١٦ - ١٤ هو :

$$i_p = 1.06 \sin (1000t + 32°)$$

إذن فالتيار التام هو :

$$i = e^{-250t} (c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t) + 1.06 \sin (1000t + 32°) \text{ amperes} \qquad (٢)$$

من المعادلة (١) عند $t = 0$ نجد أن $i_0 = 0$ و $di/dt = 1000$ وبالتعويض فى المعادلة (٢) نحصل على $c_1 = -0.562$. والآن بتفاضل المعادلة (٢) نحصل على :

$$\frac{di}{dt} = e^{-250t}(-371c_1 \sin 371t + 371c_2 \cos 371t)$$

$$+ (c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t)(-250\,e^{-250t}) + 1{\cdot}06(1000) \cos (1000t + 32°) \quad (٣)$$

وبالتعويض عن $t = 0$ و $c_1 = -0.562$ و $di/dt = 1000$ فى المعادلة (٣) ، نجد أن $c_2 = -0.104$
والآن تصبح المعادلة (٢) على الصورة :

$$i = e^{-250t}(-0{\cdot}562 \cos 371t - 0{\cdot}104 \sin 371t) + 1{\cdot}06 \sin (1000t + 32°) \text{ amperes}$$

١٦ – ١٧ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 100\,\Omega$ و $L = 0.1$ H و $C = 50\,\mu$F يؤثر عليها مصدر جهد جيبى : $v = 100 \sin (1000t + \varphi)$ volts فإذا أغلق المفتاح عندما كانت $\varphi = 90°$ ، فأوجد التيار بفرض أن الشحنة الإبتدائية على المكثف تساوى صفراً .

عند غلق المفتاح تكون معادلة الدائرة هى :

$$100i + 0{\cdot}1\frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}}\int i\,dt = 100 \sin (1000t + 90°)$$

أو

$$(D^2 + 1000D + 2 \times 10^5)i = 10^6 \cos (1000t + 90°) \quad (١)$$

وجذرا المعادلة المميزة هما $D_1 = -276.5$ و $D_2 = -723.5$

والدالة المتممة هى $c_1 e^{-276{\cdot}5t} + c_2 e^{-723{\cdot}5t}$ ، والحل الخاص الذى نحصل عليه بالطريقة المستخدمة فى المسألة ١٦ – ١٤ هو : $i_p = 0{\cdot}781 \sin (1000t + 51{\cdot}4°)$. إذن التيار التام هو :

$$i = c_1 e^{-276{\cdot}5t} + c_2 e^{-723{\cdot}5t} + 0{\cdot}781 \sin (1000t + 51{\cdot}4°) \text{ amperes} \quad (٢)$$

لتعيين الثابتين c_1 و c_2 فإننا نحسب i و di/dt عند $t = 0$ فى المعادلة (١) . وبالتعويض بالنتيجة $i_0 = 0$ و $di/dt = 1000$ فى المعادلة (٢) ، نحصل على :

$$i_0 = 0 = c_1(1) + c_2(1) + 0{\cdot}781 \sin 51{\cdot}4 \quad \text{أو} \quad c_1 + c_2 = -0{\cdot}610 \quad (٣)$$

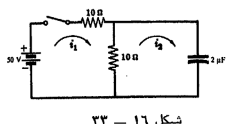
وبتفاضل المعادلة (٢) والتعويض عن $t = 0$ و $di/dt = 1000$ نجد أن :

$$di/dt = 1000 = -276{\cdot}5c_1 - 723{\cdot}5c_2 + 781 \cos 51{\cdot}4° \quad \text{أو} \quad 276{\cdot}5c_1 + 723{\cdot}5c_2 = -513 \quad (٤)$$

وبحل المعادلتين الآنيتين (٣) و (٤) نجد أن $c_1 = 0.161$ و $c_2 = -0.771$

إذن :

$$i = 0{\cdot}161\,e^{-276{\cdot}5t} - 0{\cdot}771\,e^{-723{\cdot}5t} + 0{\cdot}781 \sin (1000t + 51{\cdot}4°) \text{ amperes}$$



شكل ١٦ — ٣٣

١٦ – ١٨ فى الشبيكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٦ – ١٣ أغلق المفتاح عند $t = 0$ أوجد تيار الشبيكتين العابرين i_1 و i_2 الموضحين فى الشكل وجهد العبور v_C على المكثف .

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على المسارين المغلقين نحصل على :

$$20i_1 - 10i_2 = 50 \quad \text{أو} \quad 2Di_1 = Di_2 \qquad (١)$$

$$-10i_1 + 10i_2 + \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \int i_2\, dt = 0 \quad \text{أو} \quad -Di_1 + (D + 5 \times 10^4)i_2 = 0 \qquad (٢)$$

ونجد من المعادلة (١) أن $Di_1 = \frac{1}{2}Di_2$. وبالتعويض بها فى المعادلة (٢) نحصل على :

$$-(\tfrac{1}{2}Di_2) + (D + 5 \times 10^4)i_2 = 0 \quad \text{أو} \quad (D + 10^5)i_2 = 0 \qquad (٣)$$

وبما أن المعادلة (٣) متجانسة فإن حلها يحتوى فقط على الدالة المتممة .

إذن :

$$i_2 = c\, e^{-10^5 t} \text{ amperes}$$

وبوضع $t = 0$ فى المعادلة (٢) نجد أن $-10i_1 + 10i_2 = 0$ أو $i_1 = i_2$. إذن المعادلة (١) عند $t = 0$ تصبح $20i_1 - 10i_1 = 50$ أو $i_1 = i_2 = 5$. وبالتعويض عن قيمة i_2 فى المعادلة (٤) نجد أن $c = 5$ إذن :

$$i_2 = 5\, e^{-10^5 t} \text{ amperes} \qquad (٥)$$

والآن نحصل على تيار العبور i_1 بالتعويض من (٥) فى المعادلة (١) .

إذن :

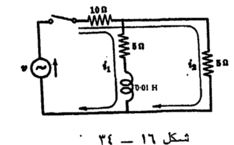
$$20i_1 - 10(5\, e^{-10^5 t}) = 50 \quad \text{و} \quad i_1 = 2.5 + 2.5\, e^{-10^5 t} \text{ amperes}$$

ونحصل على جهد العبور v_C عبر المكثف بتكامل تيار الشبيكة الفرعية i_2 .

$$v_C = \frac{1}{C}\int i_2\, dt = \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \int 5\, e^{-10^5 t}\, dt = 25(1 - e^{-10^5 t}) \text{ volts}$$

١٦ – ١٩ فى الشبيكتين الفرعيتين الموضحتين فى الشكل ١٦ – ٣٤ أغلق المفتاح عند $t = 0$ وكان مصدر الجهد هو $v = 150 \sin 1000t$ volts . أوجد تيارى الشبيكتين i_1 و i_2 المعطيان فى الشكل .

ينتج من تطبيق قانون كيرشوف على المسارين الموضحين أن :



شكل ١٦ — ٣٤

$$10i_2 + 15i_1 + 0{\cdot}01\frac{di_1}{dt} = 150 \sin 1000t$$

أو

$$(D + 1500)i_1 + 1000i_2 = 15{,}000 \sin 1000t \quad (١)$$

$$15i_2 + 10i_1 = 150 \sin 1000t \quad (٢)$$

من المعادلة (٢) نجد أن : $i_2 = 10 \sin 1000t - \frac{2}{3}i_1$ amperes (٣)

وبالتعويض فى المعادلة (١) نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$(D + 833)i_1 = 5000 \sin 1000t \quad (٤)$$

والحل التام الذى نحصل عليه باستخدام طريقة المسألة ١٦ — ١٤ هو

$$i_1 = c\,e^{-833t} + 3{\cdot}84 \sin (1000t - 50{\cdot}2^\circ) \text{ amperes} \quad (٥)$$

والآن بالتعويض عن i_1 فى المعادلة (٣) نجد

$$i_2 = -\tfrac{2}{3}c\,e^{-833t} - 2{\cdot}56 \sin (1000t - 50{\cdot}2) + 10 \sin 1000t$$

$$= -\tfrac{2}{3}c\,e^{-833t} + 8{\cdot}58 \sin (1000t + 13{\cdot}25^\circ) \text{ amperes} \quad (٦)$$

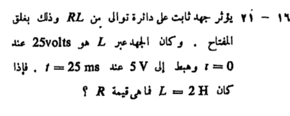
تيار الشبيكة i_1 يمر خلال الملف وعلى ذلك فإنه يساوى صفراً عند $t = 0$. وبالتعويض فى المعادلة (٥) نجد : $c(1) + 3{\cdot}84 \sin (-50{\cdot}2^\circ)$ 0 و $c = 2.95$. إذن فمعادلتا تيارى الشبيكتين هما :

$$i_1 = 2{\cdot}95\,e^{-833t} + 3{\cdot}84 \sin (1000t - 50{\cdot}2^\circ) \text{ amperes} \quad \text{و} \quad i_2 = -1{\cdot}97\,e^{-833t} + 8{\cdot}58 \sin (1000t + 13{\cdot}25^\circ) \text{ amperes}$$

مسائل اضافية

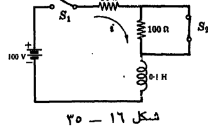
١٦ – ٢٠ فى دائرة التوالى المكونة من RL والموضحة فى الشكل ١٦ – ٣٥ ، أغلق المفتاح S_1 عند $t = 0$ وبعد 4ms فتح المفتاح S_2 . أوجد التيار فى الفترتين $0 < t < t'$ و $t' < t$ حيث $t' = 4\text{ ms}$ الجواب :

$$i = 2(1 - e^{-500t})\text{ amperes}, i = 1.06\,e^{-1500(t-t')} - 0.667\text{ amperes}$$



١٦ – ٢١ يؤثر جهد ثابت على دائرة توالى من RL وذلك بغلق المفتاح . وكان الجهد عبر L هو 25volts عند $t = 0$ وهبط إلى 5 V عند $t = 25\text{ ms}$. فإذا كان $L = 2\text{ H}$ فما هى قيمة R ؟

الجواب : $128.8\,\Omega$



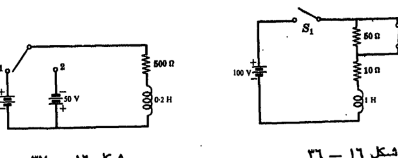
شكل ١٦ – ٣٥

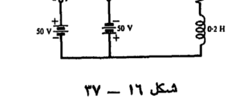
١٦ – ٢٢ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٦ – ٣٦ أغلق المفتاح S_1 عند $t = 0$ وفتح المفتاح S_2 عند t=o.2sec . أوجد معادلة التيار العابر لهاتين الفترتين .

الجواب : $i = 10(1 - e^{-10t})\text{ amperes}, i = 6.97\,e^{-60(t-t')} + 1.67\text{ amperes}$

١٦ – ٢٣ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٦ – ٣٧ أغلق المفتاح إلى الموضع 1 عند $t = 0$ ، ثم تحرك إلى الموضع 2 بعد 1ms . أوجد الزمن الذى يغير عنده التيار اتجاهه ويصبح مساوياً للصفر .

الجواب : 1.261 ms





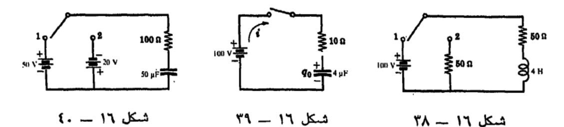
شكل ١٦ – ٣٧ شكل ١٦ – ٣٦

١٦ – ٢٤ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٦ – ٣٨ أغلق المفتاح إلى الموضع 1 لوقت كاف للوصول إلى حالة الاستقرار فى التيار . وعندما تحرك المفتاح إلى الموضع 2 كان هناك تيار عابر يمر فى المقاومة $50\,\Omega$ لفترة زمنية قصيرة . أوجد الطاقة المستنفدة فى المقاومة خلال فترة العبور هذه .

الجواب : 8 joules

١٦ – ٢٥ يوجد على مكثف دائرة RC الموضحة فى الشكل ١٦ – ٣٩ شحنة ابتدائية $q_0 = 800 \times 10^{-6}$ coulombs بالقطبية الموضحة فى الرسم . أوجد كلا من تيار وشحنة العبور الناتجتين عند غلق المفتاح .

الجواب : $i = -10e^{-2.5\times10^4 t}$ amperes, $q = 400(1 + e^{-2.5\times10^4 t}) \times 10^{-6}$ coulombs



شكل ١٦ — ٣٨   شكل ١٦ — ٣٩   شكل ١٦ — ٤٠

١٦ – ٢٦ وصل مكثف $2\ \mu F$ وعليه شحنة ابتدائية $q_0 = 100 \times 10^{-6}$ coulombs عبر طرفى المقاومة $100\ \Omega$ عند $t = 0$. أوجد الزمن الذى يهبط فيه الجهد العابر عبر المقاومة من 40 إلى 10 V .

الجواب : $277.4\ \mu s$

١٦ – ٢٧ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٦ – ٤٠ أغلق المفتاح إلى الموضع 1 عند $t = 0$ ثم تحرك إلى الموضع 2 بعد 1 TC . أوجد تعبيرين للتيار العابر فى الفترتين $0 < t < t'$ و $t' < t$

الجواب : $0.5\, e^{-200t}$ amperes, $i = -0.516 e^{-200(t-t')}$ amperes

١٦ – ٢٨ بالإشارة إلى المسألة ١٦ – ٢٧ ، حل المعادلة التفاضلية على أساس الشحنة . من دوال الشحنة العابرة أوجد تعبيرين للتيار ثم قارن النتائج .

١٦ – ٢٩ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٦ – ٤١ وضع المفتاح فى الموضع 1 لفترة زمنية كافية للوصول إلى حالة الاستقرار ثم تحرك بعد ذلك إلى الموضع 2 . يمر تيار عابر عند تحريك المفتاح إلى الموضع 2 وينتج عن ذلك استنفاذ طاقة فى المقاومتين . أوجد هذه الطاقة وقارنها بالطاقة المخزونة فى المكثف بعد تحريك المفتاح .

الجواب : **0.20 joules**

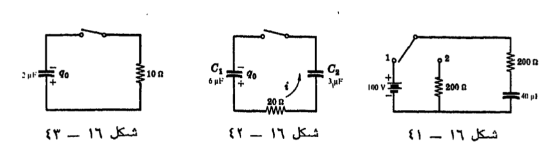
١٦ – ٣٠ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٦ – ٤٢ كان على المكثف C_1 شحنة ابتدائية $q_0 = 300 \times 10^{-6}$ coulombs فإذا أغلق المفتاح عند $t = 0$ فأوجد التيار العابر والشحنة العابرة والجهد النهائى على المكثف C_1 .

الجواب : $i = 2.5\, e^{-2.5\times10^4 t}$ amperes, $q = 200(1 + 0.5\, e^{-2.5\times10^4 t}) \times 10^{-6}$ coulombs, 33.3 V

١٦ – ٣١ بالإشارة إلى المسألة ١٦ – ٣٠ ، أوجد الجهود العابرة V_{C_1} و V_{C_2} و V_R ثم بين أن مجموعهم يساوى صفراً .

الجواب :

$v_{C_1} = 33.3 + 16.7\, e^{-2.5\times10^4 t}$ volts, $v_{C_2} = 33.3(1 - e^{-2.5\times10^4 t})$ volts, $v_R = -50\, e^{-2.5\times10^4 t}$ volts



شكل ١٦ — ٤١ شكل ١٦ — ٤٢ شكل ١٦ — ٤٣

١٦ — ٣٢ فى دائرة التوالى RC الموضحة فى الشكل ١٦ — ٤٣ كان على المكثف شحنة ابتدائية q_0 وأغلق المفتاح عند $t = 0$. أوجد q_0 علماً بأن قدرة العبور فى المقاومة هى $p_R = 360e^{-10^5 t}$ watts

الجواب : 120×10^{-6} coulombs

١٦ — ٣٣ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 200\ \Omega$ و $L = 0.1$ H و $C = 100\ \mu$F. يؤثر عليها جهد ثابت $V = 200$ volts عند $t = 0$. أوجد التيار بفرض أنه لاتوجد شحنة ابتدائية على المكثف .

الجواب : $i = 1{\cdot}055e^{-52t} - 1{\cdot}055e^{-1948t}$ amperes

١٦ — ٣٤ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 200\ \Omega$ و $L = 0.1$ H ، فإذا اختيرت قيمة سعة المكثف بحيث تصبح الدائرة فى حالة تضاؤل حرج ، فأوجد قيمة C المطلوبة .

الجواب : $10\ \mu$F

١٦ — ٣٥ أوجد الذبذبة الطبيعية لدائرة التوالى RLC التى فيها $R = 200\ \Omega$ و $L = 0.1$ H و $C = 5\ \mu$F .

الجواب : 1000 rad/s

١٦ — ٣٦ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 5\ \Omega$ و $L = 0.1$ H و $C = 500\mu$F يؤثر عليها جهد ثابت $V = 10$ volts عند $t = 0$. أوجد التيار العابر الناتج .

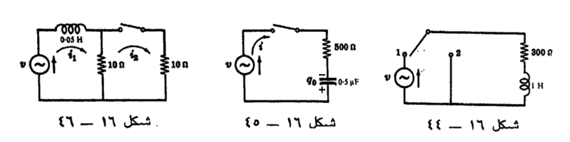
الجواب : $i = 0{\cdot}72\ e^{-25t} \sin 139t$ amperes

١٦ — ٣٧ دائرة توالى تتكون من RL فيها $R = 300\ \Omega$ و $L = 1.0$ H يؤثر عليها جهد جيبى $v = 100 \cos (100t + \varphi)$ volts . فإذا أغلق المفتاح عندما كانت $\varphi = 45°$ ، فأوجد التيار العابر الناتج .

الجواب : $i = -0{\cdot}282e^{-300t} + 0{\cdot}316 \cos (100t + 26{\cdot}6°)$ amperes

١٦ — ٣٨ تعمل دائرة RL الموضحة فى الشكل ١٦ — ٤٤ فى حالة جيبية والمفتاح فى الموضع 1. فإذا تحرك المفتاح إلى الموضع 2 عندما كان مصدر الجهد $v = 100 \cos (100t + 45°)$ volts . فأوجد التيار العابر وارسم آخر نصف دورة فى الحالة المستقرة مع الفترة العابرة لتوضيح العبور .

الجواب : $i = 0{\cdot}282e^{-300t}$ amperes



شكل ١٦ — ٤٦ شكل ١٦ — ٤٥ شكل ١٦ — ٤٤

١٦ — ٣٩ فى دائرة التوالى المكونة من RC والموضحة فى الشكل ١٦ — ٤٥ كان على المكثف شحنة ابتدائية $q_0 = 25 \times 10^{-6}$ coulombs بالقطبية الموضحة فى الرسم . فإذا أثر جهد جيبى $v = 100 \sin (1000t + \varphi)$ volts is على الدائرة عند الزمن الذى كانت عنده $\varphi = 30°$ ، فأوجد التيار العابر .

الجواب : $i = 0{\cdot}1535\, e^{-4 \times 10^3 t} + 0{\cdot}0484 \sin (1000t + 106°)$ amperes

١٦ — ٤٠ بالإشارة إلى المسألة ١٦ — ٣٩ ، ماهى الشحنة الإبتدائية التى يجب تواجدها على المكثف بحيث يذهب التيار مباشرة إلى الحالة المستقرة بدون فترة عابرة وذلك عند غلق المفتاح ؟

الجواب : $13{\cdot}37 \times 10^{-6}$ coulombs + عند اللوح العلوى .

١٦ — ٤١ بين أن لدائرة التوالى RLC ذات المصدر $v = V_{max} \sin (\omega t + \varphi)$ حل خاص لمعادلتها التفاضلية يعطى بالعلاقة

$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin \left(\omega t + \varphi + \tan^{-1} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R} \right)$$

١٦ — ٤٢ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 5\,\Omega$ و $L = 0.1$ H و $C = 500\,\mu$F . يؤثر عليها جهد جيبى $v = 100 \sin (250t + \varphi)$ volts عند الزمن الذى كانت عنده $\varphi = 0°$. أوجد التيار الناتج .

الجواب : $i = e^{-25t} (5{\cdot}42 \cos 139t - 1{\cdot}89 \sin 139\, t) + 5{\cdot}65 \sin (250t - 73{\cdot}6°)$ amperes

١٦ — ٤٣ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 200\,\Omega$ و $L = 0.5$ H و $C = 100\,\mu$F . يؤثر عليها جهد جيبى $v = 300 \sin (500t + \varphi)$ volts . فإذا أغلق المفتاح عندما كانت $\varphi = 30°$ ، فأوجد التيار الناتج .

الجواب : $i = 0{\cdot}517\, e^{-341{\cdot}4t} - 0{\cdot}197\, e^{-58{\cdot}6t} + 0{\cdot}983 \sin (500t - 19°)$ amperes

١٦ — ٤٤ دائرة توالى تتكون من RLC فيها $R = 50\,\Omega$ و $L = 0.1$ H و $C = 50\,\mu$F . يؤثر عليها جهد جيبى $v = 100 \sin (500t + \varphi)$ volts . فإذا أغلق المفتاح عندما كانت $\varphi = 45°$ ، فأوجد التيار الناتج .

الجواب : $i = e^{-250t} (-1{\cdot}09 \cos 371t - 1{\cdot}025 \sin 371t) + 1{\cdot}96 \sin (500t + 33{\cdot}7°)$ amperes

١٦ — ٤٥ فى الشبكة الكهربائية المكونة من شبكيتين فرعيتين والموضحة فى الشكل ١٦ — ٤٦ يعطى مصدر الجهد فى الشبكية 1

بالعلاقة $100 \sin (200t \cdot \varphi)$ volts. ٢ . أوجد تيارى العبور i_1 و i_2 فى الشبيكيتين إذا أغلق المفتاح عندما كانت $\varphi = 0$.

الجواب :

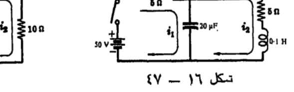
$i_1 = 3{\cdot}01e^{-100t} \cdot 8{\cdot}96 \sin (200t - 63{\cdot}4^\circ)$ amperes, $i_2 = 1{\cdot}505e^{-100t} + 4{\cdot}48 \sin (200t \quad 63{\cdot}4^\circ)$ amperes

١٦ – ٤٦ أوجد فى الشبيكيتين الفرعيتين الموضحتين فى الشكل ١٦ – ٤٧ تيارى الشبيكيتين i_1 و i_2 عندما يغلق المفتاح عند $t = 0$.

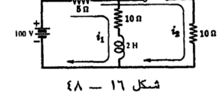
الجواب : $i_1 = 0{\cdot}101e^{-100t} + 9{\cdot}899e^{-9950t}$ amperes, $i_2 = -5{\cdot}05e^{-100t} + 5 + 0{\cdot}05e^{-9950t}$ amperes .

١٧ – ٤٧ إذا أغلق المفتاح فى الشبيكيتين الفرعيتين الموضحتين فى الشكل ١٦ – ٤٨ عند $t = 0$ فأوجد التيارين الناتجين i_2 و i_1.

الجواب : $i_1 = 1{\cdot}67e^{-6{\cdot}67t} + 5$ amperes, $i_2 = -0{\cdot}555e^{-6{\cdot}67t} + 5$ amperes



شكل ١٦ — ٤٧



شكل ١٦ — ٤٨

الفصل السابع عشر

دراسة الظواهر العابرة بطريقة تحويل لابلاس

مقدمة :

حللنا فى الفصل السادس عشر التيارات العابرة فى الدوائر الكهربائية التى تحتوى على عناصر خازنة للطاقة . وقد نتج عن تطبيق قوانين كيرشوف على هذه الدوائر معادلة تفاضلية أو أكثر بدلالة الزمن ، وذلك حسب تركيب الدائرة . وقد حلت هذه المعادلات بالطرق التقليدية . ولكن هذه الطرق فى حالات كثيرة تكون غير مرضية وعلى ذلك فإننا ندخل فى هذا الفصل طريقة أخرى تسمى طريقة تحويل لابلاس ، وهى تمكننا من حل المعادلات التفاضلية بطريقة أكثر مباشرة ، وعلاوة على ذلك فإن بعض الدوال غير المنتظمة لا يمكن حلها بسهولة بالطرق التقليدية بينما تعطينا طريقة لابلاس حلا لهذه المسائل .

يحتوى هذا الفصل فقط على التطبيقات الأساسية لطريقة تحويل لابلاس . وقد تركنا جانباً اشتقاق الصيغ الرياضية والتطبيقات الأكثر تعقيداً ويمكن الرجوع إليها فى المراجع المختصة بتحليل فترات العبور .

تحـــــويل لابـــــلاس :

إذا كانت $f(t)$ دالة من الزمن t ومعرفة لجميع قيم $t > 0$ فإن تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ يرمز له بالرمز $\mathcal{L}[f(t)]$ ويعرف بـ

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F(s)} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (1)$$

حيث يمكن أن يكون البارامتر $\mathbf{s}$ حقيقياً أو مركباً . ونفرض فى تطبيقات الدوائر الكهربائية أن $\mathbf{s} = \delta + j\omega$. ويحول المؤثر $\mathcal{L}[f(t)]$ الدالة $f(t)$ بدلالة الزمن إلى دالة $\mathbf{F(s)}$ بدلالة الذبذبة المركبة أو ببساطة بدلالة $\mathbf{s}$. وعلى هذا فإن الدالتين $f(t)$ و $\mathbf{F(s)}$ يكونان زوجاً من البدائل أو المتحولات . ويوجد جداول واسعة الانتشار تحتوى على هذه الأزواج . والمتحولات المبينة فى الجداول ١٧ – ١ كافية للغرض المطلوب فى هذا الفصل . والشرط الكافى لوجود تحويل لابلاس هو أن الدالة $f(t)$ يجب أن تكون (أ) قطعة متصلة ، (ب) ذات رتبة أسية . تكون الدالة $f(t)$ ذات رتبة أسية إذا كان $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$ لجميع قيم $t > t_0$ حيث كل من A و t_0 ثوابت موجبة . عندما تتحقق هذه الشروط فإن تكامل التحويل المباشر يكون متقارباً لجميع قيم $\delta > \alpha$ وتكون $\mathbf{F(s)}$ موجودة . وجميع الدوال المستخدمة فى تحليل الدوائر الكهربائية تحقق الشرطين (أ) ، (ب) .

مثال ١ :

تسمى الدالة الموضحة فى الشكل ١٧ – ١ بدالة سلمية وتعرف بـ $f(t) = A$ ، $t > 0$: أوجد تحويلات لابلاس المناظرة .

بتطبيق المعادلة (١) على الدائرة $f(t) = A$ نجد أن

$$\mathcal{L}[A] = \int_0^\infty A e^{-st}\, dt = \left[-\frac{A}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{A}{s}$$

شكل ١٧ – ١

مثال ٢ :

أوجد تحويل لابلاس للدالة $f(t) = e^{-at}$ حيث a ثابت .

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^\infty e^{-at} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t}\, dt = \left[-\frac{1}{(a+s)}e^{-(a+s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

مثال ٣ :

أوجد تحويل لابلاس للدالة $f(t) = \sin \omega t$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \int_0^\infty \sin \omega t\, e^{-st}\, dt = \left[\frac{-s(\sin \omega t)e^{-st} - e^{-st}\omega \cos \omega t}{s^2 + \omega^2}\right]_0^\infty = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

مثال ٤ :

أوجد تحويل لابلاس المشتقة df/dt

$$\mathcal{L}[df/dt] = \int_0^\infty (df/dt) e^{-st}\, dt$$

باستخدام التكامل بالتجزىء $\int u\, dv = uv - \int v\, du$ حيث $u = e^{-st},\ dv = df,\ v = f$. إذن

$$\mathcal{L}[df/dt] = \left[e^{-st} f\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(-se^{-st})\, dt = -f(0+) + s\int_0^\infty f e^{-st}\, dt = -f(0+) + sF(s)$$

حيث $f(0+)$ هى قيمة الدالة عند الاقتراب من 0 من ناحية اليمين ، أى أن قيمة الدالة عند $t = (0+)$.

مثال ٥ :

أوجد تحويل لابلاس للتكامل $\int f(t)\, dt$

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\, dt\right] = \int_0^\infty \int f(t)\, dt\ e^{-st}\, dt$$

باستخدام التكامل بالتجزيء، مع وضع $u = \int f(t)\,dt$ و $dv = e^{-st}\,dt$ إذن

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \left[\int f(t)\,dt\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{s}\int f(t)\,dt\Big|_{0+} + \frac{1}{s}\mathbf{F}(s)$$

حيث $\int f(t)\,dt\Big|_{0+}$ هى قيمة التكامل عند $0+$ وتكتب أيضاً $f^{-1}(0+)$. إذن تحويل لابلاس التكامل هو

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}\mathbf{F}(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0+)$$

ويظهر زوج التحويل أو البدائل الذى حصلنا عليه فى هذا المثال فى الجدول ١٧ – ١ .

تطبيقات على تحليل الدوائر :

فى دائرة التوالى RC الموضحة فى الشكل ١٧ – ٢ توجد شحنة ابتدائية q_0 على المكثف بالقطبية الموضحة فى الرسم . عند غلق المفتاح يؤثر مصدر الجهد الثابت V على الدائرة وتكون المعادلة التفاضلية للدائرة هى :

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \qquad (٢)$$

ونستخدم $I(s)$ للتعبير عن التيار فى نطاق s ونأخذ تحويل لابلاس لكل حد فى المعادلة (٢)

$$\mathcal{L}[Ri] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{C}\int i\,dt\right] = \mathcal{L}[V] \qquad (٣)$$

$$R\,I(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{f^{-1}(0+)}{Cs} = \frac{V}{s} \qquad (٤)$$

شكل ١٧ – ٢

لدينا الآن $q(0+) = \int i\,dt\Big|_{0+} = f^{-1}(0+)$. الشحنة الابتدائية q_0 موجبة على اللوح العلوى للمكثف وهى نفس قطبية الشحنة المترسبة بالمصدر V . إذن الإشارة موجبة . وبالتعويض عن q_0 فى المعادلة (٤) نحصل على

$$R\,I(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{q_0}{Cs} = \frac{V}{s} \qquad (٥)$$

وبإعادة ترتيب الحدود وأخذ $I(s)$ مشترك .

جدول ١٧ — ١

تحويلات لابلاس

	$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$
1.	$A \quad t \geq 0$	$\frac{A}{s}$
2.	$At \quad t \geq 0$	$\frac{A}{s^2}$
3.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
5.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
7.	$\sin(\omega t+\theta)$	$\frac{s \sin\theta + \omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
8.	$\cos(\omega t+\theta)$	$\frac{s\cos\theta - \omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
9.	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
10.	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
11.	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
12.	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
13.	df/dt	$s\mathbf{F}(s) - f(0+)$
14.	$\int f(t)\,dt$	$\frac{\mathbf{F}(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0+)}{s}$
15.	$f(t-t_1)$	$e^{-t_1 s}\mathbf{F}(s)$
16.	$f_1(t) + f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(s) + \mathbf{F}_2(s)$

$$I(\mathrm{s})\left(R + \frac{1}{C\mathrm{s}}\right) = \frac{V}{\mathrm{s}} - \frac{q_0}{C\mathrm{s}} \qquad (٦)$$

و

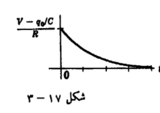
$$I(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}}(V - q_0/C)\frac{1}{(R + 1/\mathrm{s}C)} = \frac{V - q_0/C}{R}\frac{1}{(\mathrm{s} + 1/RC)} \qquad (٧)$$

المعادلة (٧) التي في نطاق s معادلة مناظرة للتيار i في نطاق الزمن . وبالتالي فإن عملية تحويل $\mathbf{F}(\mathrm{s})$ إلى $f(t)$ تسمى معكوس تحويل لابلاس ، ويرمز لها بالرمز $\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(\mathrm{s})] = f(t)$. بالإشارة إلى الجدول ١٧ - ١ نلاحظ أن $\mathbf{F}(\mathrm{s})$ لتحويل الزوج 3 تكافئ الحد $1/(\mathrm{s} + 1/RC)$ في المعادلة (٧) . إذن من تعريف معكوس تحويل لابلاس ومن الجدول نحصل على :

$$\mathcal{L}^{-1}[I(\mathrm{s})] = i = \left(\frac{V - q_0/C}{R}\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s} + 1/RC}\right] = \frac{V - q_0/C}{R}\, e^{-t/RC} \qquad (٨)$$

المعادلة (٨) هي التيار العابر في نطاق الزمن الذي ينتج عن غلق مفتاح دائرة RC التي تحتوى على شحنة ابتدائية q_0 على المكثف . وقد أدخلت الشروط الابتدائية في المعادلة (٥) في نطاق s ، وبالتالي عند أخذ معكوس التحويل فإن المعادلة الناتجة تكون محتوية على الثوابت .

لاحظ أنه بالطريقة الجبرية التي استخدمت في كتابة المعادلتين (٦) و (٧) أمكن تحويل الدالة إلى صيغة موجودة في الجدول وعلى ذلك تمكننا من الحصول على تحويل لابلاس المعاكس . يوضح الشكل ١٧ - ٣ الدالة الزمنية بالتيار الابتدائي $(V - q_0/C)/R$ وإذا كان $q_0/C = V$ فإنه لايوجد فترة عبور ذلك لأن الشحنة الابتدائية على المكثف يكون جهدها المكافئ مساوياً للجهد المؤثر V . وإذا كانت قطبية q_0 معكوسة فإن إشارة q_0/C تتغير وينتج عن ذلك تيار ابتدائي كبير نسبياً .



شكل ١٧ - ٣

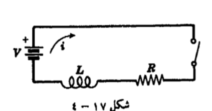
يؤثر على دائرة RL الموضحة في الشكل ١٧ - ٤ مصدر جهد ثابت V عند غلق المفتاح . ينتج من تطبيق قانون كيرشوف بعد غلق المفتاح المعادلة التالية :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V \qquad (٩)$$

والآن بتطبيق تحويل لابلاس مباشرة على كل حد نحصل على :

$$\mathcal{L}[Ri] + \mathcal{L}\left[L\frac{di}{dt}\right] = \mathcal{L}[V] \qquad (١٠)$$

$$RI(\mathrm{s}) + \mathrm{s}LI(\mathrm{s}) - Li(0+) = V/\mathrm{s} \qquad (١١)$$



شكل ١٧ - ٤

التيار الابتدائى $i(0+)$ فى دائرة التوالى RL والذى كان لها تيار مساو للصفر قبل غلق المفتاح يساوى أيضاً صفراً عند $t = 0+$. بالتعويض عن $i(0+) = 0$ فى المعادلة (١١) نحصل على :

$$I(\mathbf{s})(R + \mathbf{s}L) = V/\mathbf{s} \tag{١٢}$$

$$I(\mathbf{s}) = \frac{V}{\mathbf{s}}\frac{1}{(R + \mathbf{s}L)} = \frac{V}{L}\left(\frac{1}{\mathbf{s}}\right)\frac{1}{(\mathbf{s} + R/L)} \tag{١٣}$$

لاتظهر دالة المعادلة (١٣) فى الجدول ١٧ — ١ ، ولكن إذا أمكن تغييرها إلى الصيغة $A/\mathbf{s} + B/(\mathbf{s} + R/L)$ فإنه يمكن استخدام تحويل الزوج 3 و 1 فى جزءى هذه الصيغة ، ويعنى الزوج 16 أن الدالة الزمنية الكلية هى مجموع الدالتين الزمنيتين ، أى أن $\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{s})] = f_1(t) + f_2(t)$. للحصول على المجموع المطلوب فإننا نضع الطرف الأيمن للمعادلة (١٣) باستثناء الثابت V/L مساوياً لمجموع كسرين كما يلى :

$$\frac{1}{\mathbf{s}(\mathbf{s} + R/L)} = \frac{A}{\mathbf{s}} + \frac{B}{(\mathbf{s} + R/L)} = \frac{A(\mathbf{s} + R/L) + B\mathbf{s}}{\mathbf{s}(\mathbf{s} + R/L)} \tag{١٤}$$

والآن من البسط نحصل على المعادلة التالية فى s :

$$1 = (A + B)\mathbf{s} + AR/L \tag{١٥}$$

بمساواة معاملات s ذات القوة المتساوية نحصل على :

$$A + B = 0, \quad A = L/R, \quad B = -L/R \tag{١٦}$$

باستخدام الكسور الجزئية الموضحة واختيار A و B المعينين سابقاً فإن المعادلة (١٣) تصبح :

$$I(\mathbf{s}) = \frac{V}{L}\left(\frac{L/R}{\mathbf{s}} + \frac{-L/R}{\mathbf{s} + R/L}\right) = \frac{V}{R}\left(\frac{1}{\mathbf{s}} - \frac{1}{\mathbf{s} + R/L}\right) \tag{١٧}$$

بتطبيق التحويلين 1 و 3 فى الجدول ١٧ — ١ نحصل على تعبير مهكوس التحويل للتيار .

إذن :

$$\mathcal{L}^{-1}[I(\mathbf{s})] = i = \frac{V}{R}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathbf{s}}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathbf{s} + R/L}\right]\right\} \tag{١٨}$$

$$i = \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \tag{١٩}$$

المعادلة (١٩) هى المعادلة الأسية المعتادة وقيمة التيار فى الحالة المستقرة هى V/R .

طرق الفك :

عادة ما نحتاج إلى فك خارج القسمة فى تحليل الدوائر الكهربائية إلى مجموع عدة كسور وذلك الحصول على معكوس تحويلات لابلاس . وذلك لأن التيار فى نطاق s عادة ما يكون نسبة بين كثيرتى حدود فى s

$$I(s) = P(s)/Q(s) \tag{٢٠}$$

حيث درجة $Q(s)$ أعلى من $P(s)$. والمعادلة (١٤) توضح مثالا لفك خارج القسمة .

نختبر الآن طريقة فك الكسور الجزئية لحالات مختلفة كتلك التى تحدث فى فك خارج قسمة كثيرتى حدود . توجد طريقة أخرى نوردها فيما يلى تسمى صيغة مفكوك هيفيسيد وينتج من تطبيقاتها طرق مختلفة لحساب معكوس تحويل لابلاس لخارج قسمة كثيرتى حدود .

١ ـــ طريقة مفكوك الكسور الجزئية :

يمكن كتابة المعادلة (٢٠) كمجموع كسور مقام كل منها هو أحد عوامل $Q(s)$ وبسطها ثابت . ولفك خارج القسمة $P(s)/Q(s)$ فإننا يجب أن نعتبر جذور $Q(s)$. وهذه إما أن تكون حقيقية أو مركبة ولذلك فإنه ينتج لدينا ثلاث حالات .

الحالة ١ – جذور $Q(s)$ حقيقية وغير متساوية .

اعتبر أن التيار فى نطاق s يعطى بالصيغة التالية :

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s-1}{s^2+3s+2} \tag{٢١}$$

بتحليل $Q(s)$ فإنه يمكن كتابة المعادلة (٢١) على الصورة :

$$I(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} \tag{٢٢}$$

وعندما $s = -1$ و $s = -2$ فإن التعبير يصبح غير محدد ويقال أنة يوجد أقطاب بسيطة عند هذه القيم لـ s ويعطى معامل القطب البسيط $s = s_0$ بالعلاقة $I(s)(s-s_0)\big|_{s=s_0}$. وعلى ذلك فلتعيين المعامل نضرب كلا طرفى المعادلة (٢٢) فى $(s+2)$:

$$\frac{s-1}{(s+2)(s+1)}(s+2) = A + \frac{B}{(s+1)}(s+2) \tag{٢٣}$$

بالتعويض عن $s = -2$ نجد أن :

$$A = \frac{s-1}{s+1}\bigg|_{s=-2} = 3$$

بالمثـــل :

$$B = \frac{s-1}{s+2}\Big|_{s=-1} = -2$$

بالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (٢٢) يكون التيار فى نطاق s هو

$$I(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{-2}{s+1} \qquad (٢٤)$$

معكوس تحويل لابلاس لـ $I(s)$ الذى نحصل عليه من الجدول ١٧ - ١ هو :

$$i = 3e^{-2t} - 2e^{-t}$$

طريقة أخرى : بضرب طرفى المعادلة (٢٢) فى $(s+2)(s+1)$ نحصل على :

$$s-1 = A(s+1) + B(s+2) = (A+B)s + A + 2B$$

والآن بمساواة معاملات s ذات القوى المتساوية نجد أن $A+B=1$ و $A+2B=-1$ إذن $A=3$ و $B=-2$ وهى نفس القيم التى حصلنا عليها سابقاً . هذه الطريقة الأخرى تؤدى إلى معادلات آنية يجب حلها للحصول على المعاملات المطلوبة ، بينما تؤدى الطريقة الأولى إلى معادلة بسيطة مستقلة لكل معامل .

الحالة ٢ : جذور $Q(s)$ حقيقية ومتساوية .

اعتبر أن التيار فى نطاق s يعطى بالمعادلة :

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s(s^2+6s+9)} = \frac{1}{s(s+3)^2} \qquad (٢٥)$$

إذن :

$$\frac{1}{s(s+3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2} \qquad (٢٦)$$

بضرب طرفى المعادلة (٢٦) فى s ووضع s تساوى صفراً

$$A = \frac{1}{(s+3)^2}\Big|_{s=0} = \frac{1}{9}$$

وفى حالة الجذور المتكررة فإن معاملات الصيغة التربيعية تعطى بالعلاقة : $I(s)\,(s-s_0)^2|_{s=s_0}$ إذن :

$$C = \frac{1}{s}\Big|_{s=-3} = -\frac{1}{3}$$

ومعامل الحد الخطى الموافق يعطى بالعلاقة : $\frac{d}{ds}\left[I(s)\,(s-s_0)^2\right]\Big|_{s=s_0}$ إذن :

$$B = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)\Big|_{s=-3} = -\frac{1}{s^2}\Big|_{s=-3} = -\frac{1}{9}$$

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (٢٦) فإن التيار فى نطاق s يكون :

$$I(s) = \frac{\frac{1}{9}}{s} - \frac{\frac{1}{9}}{s+3} - \frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2} \qquad (٢٧)$$

ومعكوس تحويل لابلاس هو : $i = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t} - \frac{1}{3}te^{-3t}$

طريقة اخرى : بضرب طرفى المعادلة (٢٦) فى $s(s+3)^2$ نحصل على :

$$1 = A(s+3)^2 + Bs(s+3) + Cs = (A+B)s^2 + (6A+3B+C)s + 9A$$

وبمساواة معاملات s ذات القوى المتساوية نجـد أن $A + B = 0$ و $6A + 3B + C = 0$ و $9A = 1$ ،
إذن $A = {}^1/_9$ ، $B = -{}^1/_9$ ، $C = -{}^1/_3$ وهى نفس النتائج التى حصلنا عليها سابقاً .

الحالة ٣ : جذور $Q(s)$ مركبة :

اعتبر أن التيار فى نطاق s يعطى بالعلاقة :

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s^2+4s+5} = \frac{1}{(s+2+j)(s+2-j)} \qquad (٢٨)$$

بما أن $Q(s)$ لها جذور مترافقة فإن الثوابت فى بسط الكسور الجزئية هى أيضاً مترافقة مركبة .

إذن :

$$\frac{1}{(s+2+j)(s+2-j)} = \frac{A}{s+2+j} + \frac{A^*}{s+2-j} \qquad (٢٩)$$

بضرب طرفى المعادلة (٢٩) ، فى $(s+2+j)$ ووضع $s = -2-j$ نحصل على :

$$A = \frac{1}{s+2-j}\Big|_{s=-2-j} = j\tfrac{1}{2} \quad و \quad A^* = -j\tfrac{1}{2}$$

بالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (٢٩) يكون التيار فى نطاق s هو

$$I(s) = \frac{j\frac{1}{2}}{s+2+j} + \frac{-j\frac{1}{2}}{s+2-j} \qquad (٣٠)$$

ومعكوس لابلاس هو : $i = e^{-2t}\sin t$

طريقة اخرى : بضرب طرفى المعادلة (٢٩) فى $(s+2+j)(s+2-j)$ نحصل على :

$$1 = A(s+2-j) + A^*(s+2+j)$$

وبمساواة معاملات s ذات القوى المتساوية نجد أن $A + A^* = 0$ و $A(2-j) + A^*(2+j) = 1$ ،

إذن : $A = j\frac{1}{2}$ و $A^* = -j\frac{1}{2}$

٢ ـــ صيغة مفكوك هيڤيسيد :

تنص صيغة مفكوك هيڤيسيد على أن معكوس تحويل لابلاس لخارج القسمة $I(s) = P(s)/Q(s)$ يعطى بالعلاقة :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t} \qquad (٣١)$$

حيث a_k هى جذور $Q(s)$ الـ n المتميزة .

نطبق الآن صيغة مفكوك هيڤيسيد على التيار بدلالة s المعطى فى الحالة السابقة :

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s-1}{s^2+3s+2} = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)} \qquad (٣٢)$$

لدينا الآن $P(s) = s-1$ و $Q(s) = s^2+3s+2$ و $Q'(s) = 2s+3$ والجذران هما $a_1 = -2$ و $a_2 = -1$ إذن من المعادلة (٣١) نجد ان :

$$i = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \frac{P(-2)}{Q'(-2)}e^{-2t} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t} = \frac{-3}{-1}e^{-2t} + \frac{-2}{1}e^{-t} = 3e^{-2t} - 2e^{-t}$$

نظرية القيمة الابتدائية :

من المثال ٤

$$\mathcal{L}[df/dt] = \int_0^\infty (df/dt)e^{-st}\,dt = s\mathbf{F}(s) - f(0+) \qquad (٣٣)$$

بأخذ النهاية للمعادلة (٣٣) عندما $s \to \infty$ نحصل على :

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty (df/dt)e^{-st}\,dt = \lim_{s\to\infty}\{s\mathbf{F}(s) - f(0+)\} \qquad (٣٤)$$

يحتوى التكامل على e^{-st} الذى يقترب من الصفر عندما $s \to \infty$. إذن :

$$\lim_{s\to\infty}\{s\mathbf{F}(s) - f(0+)\} = 0 \qquad (٣٥)$$

بما أن $f(0+)$ ثابتة فإنه يمكننا كتابة (٣٥) على الصورة :

$$f(0+) \;=\; \lim_{s\to\infty} \{s\,\mathbf{F}(s)\} \tag{٣٦}$$

المعادلة (٣٦) هي نص نظرية القيمة الابتدائية . وعلى هذا فإنه يمكننا إيجاد القيمة الابتدائية لدالة الزمن $f(t)$ بضرب الدالة المناظرة فى نطاق $\mathbf{F}(s)$ فى s وأخذ النهاية عندما $s \to \infty$.

مثال ٦:

فى دائرة RC الموضحة فى الشكل ١٧ – ٢ إذا كان التيار بدلالة s هو $I(s) = \dfrac{V - q_0/C}{R}\left(\dfrac{1}{(s + 1/RC)}\right)$ [أنظر المعادلة (٧)] فعين التيار الابتدائى $i(0+)$ باستخدام نظرية القيمة الابتدائية .

من المعادلة (٣٦) نجد أن :

$$i(0+) \;=\; \lim_{s\to\infty} \left\{\frac{V - q_0/C}{R}\left(\frac{s}{(s + 1/RC)}\right)\right\} \;=\; \frac{V - q_0/C}{R}$$

وهذه النتيجة موضحة فى الشكل ١٧ – ٣ .

نظرية القيمة النهائية :

لدينا من المثال ٤

$$\mathcal{L}[df/dt] \;=\; \int_0^\infty (df/dt)e^{-st}\,dt \;=\; s\,\mathbf{F}(s) - f(0+) \tag{٣٧}$$

وبأخذ النهاية للمعادلة (٣٧) عندما $s \to 0$ نحصل على :

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty (df/dt)e^{-st}\,dt \;=\; \lim_{s\to 0}\{s\,\mathbf{F}(s) - f(0+)\} \tag{٣٨}$$

وبما أن :

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty (df/dt)e^{-st}\,dt \;=\; \int_0^\infty df \;=\; f(\infty) - f(0)$$

$$\lim_{s\to 0} f(0+) \;=\; f(0+)$$

فإن المعادلة (٣٨) تصبح :

$$f(\infty) - f(0) = -f(0+) + \lim_{s\to 0} \{s\,\mathbf{F}(s)\}$$

أو

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} \{s\,\mathbf{F}(s)\} \qquad (٤٠)$$

المعادلة (٤٠) هى نص نظرية القيمة النهائية . وبالتشابه مع التطبيق لنظرية القيمة الابتدائية يمكننا إيجاد القيمة النهائية لدالة الزمن $f(t)$ بضرب الدالة المناظرة بدلالة s أى $\mathbf{F}(s)$ فى s وأخذ النهاية عندما $s \to 0$. ومع ذلك فإن المعادلة (٤٠) تطبق فقط عندما تكون جميع جذور مقام $\mathbf{F}(s)$ لها أجزاء حقيقية سالبة . وهذا الشرط يستبعد الدوال الجيبية لأن الدالة الجيبية محددة فى مالا نهاية .

مثال ٧ :

فى دائرة RL الموضحة فى شكل ١٧ – ٤ إذا كان التيار فى نطاق s هو $I(s) = \frac{V}{R}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L}\right\}$

[أنظر المعادلة (١٧)] فعين القيمة النهائية للتيار .

من المعادلة (٤٠) نجد أن :

$$i(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{V}{R}\left\{\frac{s}{s} - \frac{s}{s + R/L}\right\} = V/R$$

دوائر نطاق s :

معادلة دائرة التوالى RLC الموضحة فى الشكل ١٧ – ٥ هى :

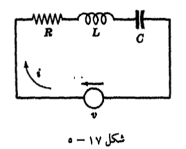
$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = v \qquad (٤١)$$

وقد حلت هذه المعادلة التكاملية – التفاضلية فى الفصل السادس عشر بالطرق التقليدية .

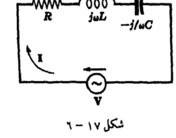
فى الحالة الجيبية المستقرة يكون لعناصر الدائرة الثلاثة R و L و C ممانعات مركبة تعطى بدلالة ω ، وتعرف بـ R و $j\omega L$ و $1/j\omega C$ على الترتيب . وعلى هذا فإن معادلة الدائرة تتحول من نطاق الزمن إلى نطاق الذبذبة ، وبهذا التحويل تصبح الجهود والتيارات مطاورة . والآن فإن معادلة دائرة التوالى RLC الموضحة فى الشكل ١٧ – ٦ هى :

$$R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} + (1/j\omega C)\mathbf{I} = \mathbf{V} \qquad (٤٢)$$

والميزة التي نحصل عليها من هذا التحويل هي أنه يمكن معالجة المعادلة المحولة جبرياً للحصول على التيار المطاور $\mathbf{I}$. والهبوط في الجهود المختلفة هي ببساطة حاصل ضرب التيار المطاور في معاوقة عنصر الدائرة .



شكل ١٧ – ٥



شكل ١٧ – ٦

ينتج من طريقة تحويل لابلاس لتحويل الهبوط في الجهد Ri في نطاق الزمن إلى $RI(\mathrm{s})$ في نطاق s . وبالمثل فإن الجهد عبر حث ما $L(di/dt)$ يصبح $\mathrm{s}L\,I(\mathrm{s}) - L\,i(0+)$ والجهد عبر مكثف ما

$$\frac{1}{C}\int i\,dt \quad \text{يصبح} \quad \frac{1}{\mathrm{s}C}I(\mathrm{s}) + \frac{q_0}{\mathrm{s}C}$$

شكل ١٧ – ٧

إذن معـــادلة دائرة التوالي الموضحة في الشكل ١٧ – ٧ تكون :

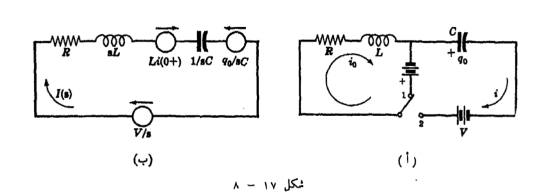
$$RI(\mathrm{s}) + \mathrm{s}LI(\mathrm{s}) - Li(0+) + \frac{1}{\mathrm{s}C}I(\mathrm{s}) + \frac{q_0}{\mathrm{s}C} = V(\mathrm{s}) \qquad (٤٣)$$

أو

$$I(\mathrm{s})\{R + \mathrm{s}L + 1/\mathrm{s}C\} = V(\mathrm{s}) - q_0/\mathrm{s}C + Li(0+) \qquad (٤٤)$$

في المعادلة (٤٤) ، $R + \mathrm{s}L + 1/\mathrm{s}C$ هي المعاوقة $Z(\mathrm{s})$ في نطاق s ؛ وهي النسبة بين الإثارة إلى الاستجابة . تأخذ $Z(\mathrm{s})$ نفس شكل المعاوقة المركبة لحالة الجيبية المستقرة ، $R + j\omega L + 1/j\omega C$. ويمكن تطبيق معادلات طريقة كل من تيار الشبيكة وجهد العقدة في التحليل ببساطة على الدوائر بدلالة s طالما أن الإشارات السليمة قد استخدمت في حدى الشرط الابتدائي $Li(0+)$ و $q_0/\mathrm{s}C$.

اعتبر الدائرة الموضحة في الشكل ١٧ – ٨ (أ) والتي يمر فيها تيار ابتدائي i_0 بينما كان المفتاح في الموضع 1 . عند $t = 0$ يتحرك المفتاح إلى الموضع 2 وبذلك يدخل إلى الدائرة مصدر جهد ثابت V ومكثف ذات شحنة ابتدائية q_0 ولقد اختير الاتجاه الموجب للتيار المفروض في اتجاه عقارب الساعة ، كما هو موضح بالرسم .



(ب) (أ)

شكل ١٧ – ٨

الآن يحول المصدر الثابت إلى V/s والتيار الناتج إلى $I(s)$ كما هو موضح فى الشكل ١٧ – ٨ (ب) . حدود الشرط الابتدائى الآن هى مصادر اتجاهها كما هو موضح وتكون المعادلة المناظرة مطابقة للمعادلة (٤٤) . ولتيار ابتدائى i_0 فى عكس الاتجاه أو شحنة q_0 بإشارة معاكسة فإن إشارات الحدين $L\,i(0+)$ و q_0/sC تتغير بالتالى . والأمثلة الآتية توضح كيف أن المعادلات فى نطاق s مشابهة للمعادلات المطاورة التى سبق علاجها فى هذا الكتاب . وجميع نظريات الشبكات الكهربائية التى تطبق على الحالة الجيبية المستقرة لها ما يقابلها فى نطاق s .

مثال ٨ :

فى الشبكة الكهربائية ذات الشبيكتين الفرعيتين والموضحة فى الشكل ١٧ – ٩ ، اختير تياراً الشبيكة بدلالة s كما هو موضح فى الرسم . فإذا أغلق المفتاح عند $t = 0$ فأوجد معادلتى $I_1(s)$ و $I_2(s)$.

عند غلق المفتاح يؤثر المصدر V/s على الشبكة الكهربائية وتكون معادلتا تيار الشبيكة هما :

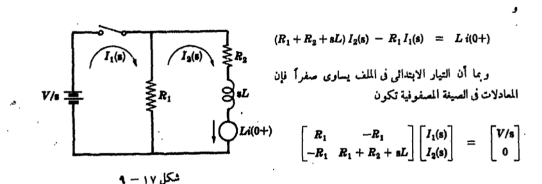
$$R_1 I_1(s) - R_1 I_2(s) = V/s$$

و

$$(R_1 + R_2 + sL)\, I_2(s) - R_1 I_1(s) = L\,i(0+)$$

وبما أن التيار الابتدائى فى الملف يساوى صفراً فإن المعادلات فى الصيغة المصفوفية تكون

$$\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/s \\ 0 \end{bmatrix}$$



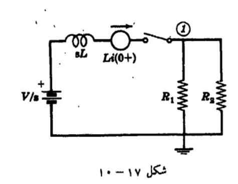
شكل ١٧ – ٩

والآن نحصل على معادلتي $I_1(s)$ و $I_2(s)$ المستقلتين إما بالتعويض أو بطريقة المحددات ، والمعادلتان الناتجتان هما :

$$I_2(s) = \frac{V}{s}\frac{1}{(R_2+sL)} \quad , \quad I_1(s) = \frac{V}{s}\left[\frac{R_1+R_2+sL}{R_1(R_2+sL)}\right]$$

مثال ٩ :

اكتب معادلة جهد العقدة فى نطاق s للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧ — ١٠ .



شكل ١٧ — ١٠

نختار العقد 1 وعقدة الإسناد كما هو موضح فى الرسم وعند غلق المفتاح تكون معادلة العقدة هى :

$$\frac{V_1(s) - V/s - L\,i(0+)}{sL} + \frac{V_1(s)}{R_1} + \frac{V_1(s)}{R_2} = 0$$

أو

$$(1/sL + 1/R_1 + 1/R_2)\,V_1(s) = \frac{V/s + L\,i(0+)}{sL}$$

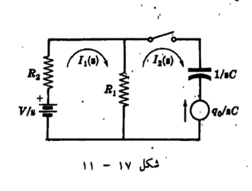
وبما أن التيار الابتدائى فى الملف يساوى صفراً ، إذن فالمعادلة لجهد العقدة $V_1(s)$ هى .

$$V_1(s) = \frac{V}{s}\left(\frac{R_1R_2}{R_1R_2 + sLR_2 + sLR_1}\right)$$

مثال ١٠ :

اكتب معادلات تيار الشبيكة فى نطاق s للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧ — ١١ علما بأنه يوجد على المكثف شحنة ابتدائية q_0 عند الزمن الذى أغلق عنده المفتاح .

نختار تيارات الشبيكة كما هو موضح فى الرسم . بتطبيق قانون كيرشوف على المسارين المغلقين ينتج :



شكل ١٧ — ١١

$$(R_1 + R_2)\,I_1(s) - R_1\,I_2(s) = V/s$$

و

$$(R_1 + 1/sC)\,I_2(s) - R_1\,I_1(s) = -q_0/sC$$

وبكتابة هاتين المعادلتين فى الصيغة المصفوفية نحصل على :

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + 1/sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/s \\ -q_0/sC \end{bmatrix}$$

مسائل محلولة

١٧ – ١ أوجد تحويل لابلاس للدالة $e^{-at}\cos \omega t$ حيث a ثابت .

بتطبيق المعادلة المعرفة $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ على الدالة المعطاة نحصل على :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at}\cos \omega t] &= \int_0^\infty \cos \omega t\, e^{-(s+a)t}\,dt \\ &= \left[\frac{-(s+a)\cos \omega t\, e^{-(s+a)t} + e^{-(s+a)t}\,\omega \sin \omega t}{(s+a)^2 + \omega^2}\right]_0^\infty \\ &= \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

١٧ – ٢ إذا كان $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ فبين أن $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$. طبق هذه النتيجة على المسألة ١٧ – ١ .

لدينا من التعريف أن : $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = F(s)$. إذن

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-at}[f(t)e^{-st}]\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}\,dt = F(s+a) \qquad (١)$$

وحيث أن $\mathcal{L}[\cos \omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ ، (أنظر الجدول ١٧ – ١) ، ينتج من (١) أن

$\mathcal{L}[e^{-at}\cos \omega t] = \dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ ، كما تعين فى المسألة ١٧ – ١ .

١٧ – ٣ أوجد تحويل لابلاس للدالة $f(t) = 1 - e^{-at}$ حيث a ثابت

لدينا :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1 - e^{-at}] &= \int_0^\infty (1 - e^{-at})e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt - \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{s}e^{-st} + \frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)} \end{aligned}$$

١٧ - ٤ أوجد $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-a^2)}\right]$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{1}{s(s^2-a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{s-a}$$

والمعاملات هى :

$$A = \left.\frac{1}{s^2-a^2}\right|_{s=0} = -\frac{1}{a^2} \qquad B = \left.\frac{1}{s(s-a)}\right|_{s=-a} = \frac{1}{2a^2} \qquad C = \left.\frac{1}{s(s+a)}\right|_{s=a} = \frac{1}{2a^2}$$

ولدينا الآن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-a^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/a^2}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s+a}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s-a}\right]$$

والدالة الزمنية المناظرة موجودة فى الجدول ١٧ - ١

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-a^2)}\right] = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2}e^{-at} + \frac{1}{2a^2}e^{at}$$

$$= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{a^2}(\cosh at - 1)$$

١٧ - ٥ اوجد $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right]$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية نحصل على

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

إذن

$$C = \left.\frac{s+1}{s}\right|_{s=-2} = \frac{1}{2} \text{ و } A = \left.\frac{s+1}{(s+2)^2}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

ومعاملات الحدود التربيعية هى

$$B = \left.\frac{d}{ds}\left[\frac{s+1}{s}\right]\right|_{s=-2} = \left.-\frac{1}{s^2}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

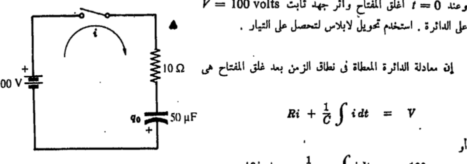
ولدينا الآن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{4}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2}\right]$$

والدالة الزمنية المناظرة موجودة فى الجدول ١٧ - ١

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t}$$

١٧ – ٦ فى دائرة التوالى المكونة من RC والموضحة فى الشكل ١٧ – ١٢ كان على المكثف شحنة ابتدائية $q_0 = 2500 \times 10^{-6}$ coulombs وعند $t = 0$ أغلق المفتاح وأثر جهد ثابت $V = 100$ volts على الدائرة . استخدم تحويل لابلاس لتحصل على التيار .



شكل ١٧ – ١٢

إن معادلة الدائرة المعطاة فى نطاق الزمن بعد غلق المفتاح هى

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = V$$

أو

$$10i + \frac{1}{50 \times 10^{-6}}\int i\,dt = 100$$

وبأخذ تحويل لابلاس لحدود المعادلة (١) نحصل على المعادلة فى نطاق s .

$$10\,I(s) + \frac{I(s)}{50 \times 10^{-6}\,s} + \frac{q_0}{50 \times 10^{-6}\,s} = \frac{100}{s} \qquad (٢)$$

وقطبية q_0 الموضحة فى الرسم تعاكس قطبية الشحنة التى يرسبها المصدر على المكثف ، إذن المعادلة فى نطاق s هى

$$10\,I(s) + \frac{I(s)}{50 \times 10^{-6}\,s} - \frac{2500 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-6}\,s} = \frac{100}{s} \qquad (٣)$$

وبإعادة ترتيب الحدود

$$I(s)\left\{\frac{10s + 2 \times 10^4}{s}\right\} = \frac{150}{s} \qquad (٤)$$

أو

$$I(s) = \frac{15}{s + 2 \times 10^3} \qquad (٥)$$

ونحصل على الدالة الزمنية الآن بأخذ معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (٥) .

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{15}{s + 2 \times 10^3}\right] = 15e^{-2\times 10^3 t} \text{ amperes}$$

إذا كانت الشحنة الابتدائية q_0 موجبة على اللوح العلوى للمكثف . تكون إشارة q_0/sC فى المعادلة (٣) موجبة . إذن يصبح الطرف الأيمن فى المعادلة (٤) $50/s$ ، وعلى ذلك يتولد التيار العابر $i = 5e^{-2\times 10^3 t}$ amperes .

١٧ – ٧ فى دائرة RL الموضحة فى الشكل ١٧ – ١٣ وضع المفتاح فى الموضع 1 لفترة زمنية كافية للوصول إلى شروط الحالة المستقرة ، وعند $t = 0$ تحرك المفتاح إلى الموضع 2 . أوجد التيار الناتج .

نفرض أن اتجاه التيار كما هو موضح فى الرسم . إذن

التيار الابتدائى هو $i_0 = -50/25 = -2$ A

والمعادلة بدلالة الزمن هى

$$25i + 0{\cdot}01(di/dt) = 100 \qquad (١)$$

وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (١)

$$25\,I(s) + 0{\cdot}01sI(s) - 0{\cdot}01\,i(0+) = 100/s \qquad (٢)$$

شكل ١٧ – ١٣

وبالتعويض عن $i(0+)$ نجد

$$25\,I(s) + 0{\cdot}01s\,I(s) + 0{\cdot}01(2) = 100/s \qquad (٣)$$

و

$$I(s) = \frac{100}{s(0{\cdot}01s + 25)} - \frac{0{\cdot}02}{0{\cdot}01s + 25} = \frac{10^4}{s(s + 2500)} - \frac{2}{s + 2500} \qquad (٤)$$

وبفك $\frac{10^4}{s(s+2500)}$ فى المعادلة (٤) بطريقة الكسور الجزئية

$$\frac{10^4}{s(s + 2500)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2500} \qquad (٥)$$

إذن

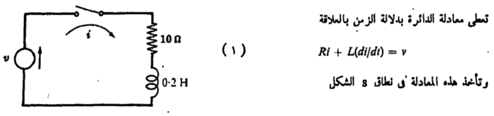
$$A = \frac{10^4}{s + 2500}\bigg|_{s=0} = 4 \quad \text{و} \quad B = \frac{10^4}{s}\bigg|_{s=-2500} = -4$$

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (٤) ينتج

$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 2500} - \frac{2}{s + 2500} = \frac{4}{s} - \frac{6}{s + 2500} \qquad (٦)$$

وبأخذ معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (٦) ، نحصل على $i = 4 - 6e^{-2500t}$ amperes

١٧ – ٨ إذا أثر على دائرة التوالى RL الموضحة فى الشكل ١٧ – ١٤ جهد أسى يعطى بالعلاقة $v = 50e^{-100t}$ volts . وذلك بغلق المفتاح عند $t = 0$ فأوجد التيار الناتج .



تعطى معادلة الدائرة بدلالة الزمن بالعلاقة

$$Ri + L(di/dt) = v \qquad (١)$$

وتأخذ هذه المعادلة فى نطاق s الشكل

$$R\,I(s) + sL\,I(s) - L\,i(0+) = V(s) \qquad (٢)$$

شكل ١٧ – ١٤

بالتعويض عن ثوابت الدائرة والمصدر بعد تحويله إلى $V(s) = 50/(s+100)$ فى المعادلة (٢) نجد

$$10\,I(s) + s(.2)\,I(s) = \frac{50}{s+100} \quad \text{أو} \quad I(s) = \frac{250}{(s+100)(s+50)} \qquad (٣)$$

باستخدام صيغة مفكوك هيفيسيد $\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{n=1,2} \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} e^{a_n t}$

حيث $P(s) = 250$ و $Q(s) = s^2 + 150s + 5000$ و $Q'(s) = 2s + 150$ ، و $a_1 = -100$ و $a_2 = -50$. إذن

$$i = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{250}{-50} e^{-100t} + \frac{250}{50} e^{-50t} = -5e^{-100t} + 5e^{-50t} \text{ amperes}$$

١٠ – ٩ يؤثر على دائرة التوالى RC الموضحة فى الشكل ١٧ – ١٥ مصدر جهد جيبى $v = 180 \sin (2000t + \varphi)$ volts فاذا كان على المكثف شحنة ابتدائية $q_0 = 1250 \times 10^{-6}$ coulombs بالقطبية الموضحة فى الرسم . فعين التيار علماً بأن المفتاح أغلق عند الزمن الذى كانت عند $\varphi = 90°$.

شكل ١٧ – ١٥

معادلة الدائرة بدلالة الزمن هى

$$40i + \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \int i\,dt = 180 \sin (2000t + 90°) \qquad (١)$$

وينتج من تحويل لابلاس للمعادلة (١) معادلة فى نطاق s .

$$40\,I(s) + \frac{1}{25 \times 10^{-6}\, s} I(s) + \frac{q_0}{25 \times 10^{-6}\, s} = 180 \left\{ \frac{s \sin 90° + 2000 \cos 90°}{s^2 + 4 \times 10^6} \right\} \qquad (٢)$$

وبالتعويض عن الشحنة q_0 فى المعادلة (٢) ينتج

$$40\,I(s) + \frac{4 \times 10^4}{s} I(s) + \frac{1250 \times 10^{-6}}{25 \times 10^{-6}\, s} = \frac{180\, s}{s^2 + 4 \times 10^6}$$

أو

$$I(s) = \frac{4{\cdot}5\, s^2}{(s^2 + 4 \times 10^6)(s + 10^3)} - \frac{1{\cdot}25}{s + 10^3} \qquad (٣)$$

وبتطبيق صيغة مفكوك هيفيسيد على الحد $\frac{4{\cdot}5\, s^2}{(s^2 + 4 \times 10^6)(s + 10^3)}$ فى المعادلة (٤) ، نحصل على $P(s) = 4{\cdot}5\, s^2$,

و $Q(s) = s^3 + 10^3 s^2 + 4 \times 10^6 s + 4 \times 10^9$. و $Q'(s) = 3s^2 + 2 \times 10^3 s + 4 \times 10^6$

و $a_1 = -j2 \times 10^3$ و $a_2 = j2 \times 10^3$ و $a_3 = -10^3$. إذن

$$i = \frac{P(-j2 \times 10^3)}{Q'(-j2 \times 10^3)} e^{-j2\times10^3 t} + \frac{P(j2 \times 10^3)}{Q'(j2 \times 10^3)} e^{j2\times10^3 t} + \frac{P(-10^3)}{Q'(-10^3)} e^{-10^3 t} - 1{\cdot}25 e^{-10^3 t} \text{ amperes} \qquad (٤)$$

$$= (1{\cdot}8 + j0{\cdot}9)e^{-j2\times10^3 t} + (1{\cdot}8 - j0{\cdot}9)e^{j2\times10^3 t} - 0{\cdot}35 e^{-10^3 t} \text{ amperes}$$

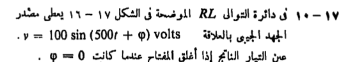
$$= 1{\cdot}8 \sin 2000t + 3{\cdot}6 \cos 2000t - 0{\cdot}35 e^{-10^3 t} \text{ amperes}$$

$$= 4{\cdot}02 \sin (2000t + 116{\cdot}6°) - 0{\cdot}35 e^{-10^3 t} \text{ amperes}$$

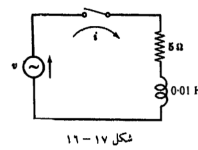
عند $t = 0$ يعطى التيار بقسمة الجهد اللحظى المكون من جهد المصدر وجهد المكثف المشحون على المقاومة إذن

$$i_0 = \left(180 \sin 90^\circ - \frac{1250 \times 10^{-6}}{25 \times 10^{-6}}\right) \Big/ 40 = 3{\cdot}25 \text{ A}$$

ونحصل على نفس النتيجة إذا وضعنا $\varphi = 0$ فى المعادلة (٤)



۱۷ – ۱۰ فى دائرة التوالى RL الموضحة فى الشكل ۱۷ – ۱٦ يعطى مصدر الجهد الجيبى بالعلاقة $v = 100 \sin (500t + \varphi)$ volts .
عين التيار الناتج إذا أغلق المفتاح عندما كانت $\varphi = 0$.



شكل ۱۷ – ۱٦

المعادلة العامة فى نطاق s لدائرة RL على التوالى هى

$$R\,I(s) + sL\,I(s) - L\,i(0+) = V(s) \qquad (۱)$$

وتحويل المصدر عند $\varphi = 0$ هو $V(s) = \dfrac{500(100)}{s^2 + (500)^2}$.

وحيث أنه لايوجد تيار ابتدائى فى الملف ؛ $L\,i(0+) = 0$.
بالتعويض عن ثوابت الدائرة فى المعادلة (۱)

$$5\,I(s) + 0{\cdot}01 s I(s) = \frac{5 \times 10^4}{s^2 + 25 \times 10^4} \quad \text{و} \quad I(s) = \frac{5 \times 10^6}{(s^2 + 25 \times 10^4)(s + 500)} \qquad (۲)$$

وبفك (۲) باستخدام الكسور الجزئية

$$I(s) = 5\left(\frac{-1 + j}{s + j500}\right) + 5\left(\frac{-1 - j}{s - j500}\right) + \frac{10}{s + 500} \qquad (۳)$$

ويكون معكوس لابلاس للمعادلة (۳) هو

$$i = 10 \sin 500t - 10 \cos 500t + 10e^{-500t} = 10e^{-500t} + 14{\cdot}14 \sin (500t - \pi/4) \text{ amperes}$$

۱۷ – ۱۱ فى المسألة ۱۷ – ۱۰ ، بكتابة دالة الجهد

$$v = 100e^{j500t} \text{ volts} \qquad (۱)$$

نكون قد أدخلنا حد جيب تمام فى مصدر الجهد . عين تيار الدائرة فى المسألة ۱۷ – ۱۰ باستخدام المعادلة (۱) .

عندما $v = 100e^{j500t}$ فإن $V(s) = 100/(s - j500)$. والمعادلة فى نطاق s هى

$$5\,I(s) + 0{\cdot}01 s\, I(s) = 100/(s - j500) \quad \text{و} \quad I(s) = 10^4/(s - j500)(s + 500) \qquad (۲)$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد

$$I(s) = \frac{10 - j10}{s - j500} + \frac{-10 + j10}{s + 500} \qquad (۳)$$

والآن بأخذ معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (۳) ، تكون دالة التيار الزمنية المناظرة هى

$$\begin{aligned} i &= (10 - j10)e^{j500t} + (-10 + j10)e^{-500t} \text{ amperes} \\ &= 14{\cdot}14 e^{j(500t - \pi/4)} + (-10 + j10)e^{-500t} \text{ amperes} \\ &= 14{\cdot}14\{\cos(500t - \pi/4) + j \sin(500t - \pi/4)\} + (-10 + j10)e^{-500t} \text{ amperes} . \end{aligned}$$

وحيث أن مصدر الجهد فى المسألة ١٧ — ١٠ يحتوى فقط على الجزء التخيلى المعادلة (٤) .

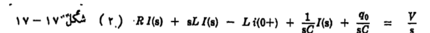
$$i = 14{\cdot}14 \sin(500t - \pi/4) + 10e^{-500t} \text{ amperes}$$

١٧ — ١٢ إذا كان فى دائرة التوالى RLC الموضحة فى الشكل ١٧—١٧ .
لايوجد شحنة ابتدائية على المكثف. وأغلق المفتاح عند $t = 0$ فعين التيار الناتج .

معادلة الدائرة بدلالة الزمن هى

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \qquad (١)$$

وينتج من تحويل لابلاس لحدود المعادلة(١)معادلة فى نطاق s هى



$$RI(s) + sLI(s) - Li(0+) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{q_0}{sC} = \frac{V}{s} \qquad (٢)$$

شكل ١٧ — ١٧

ونجد من الشروط الابتدائية أن $Li(0+) = 0$ ، $q_0/sC = 0$. وبالتعويض عن ثوابت الدائرة فى المعادلة (٢) نحصل على

$$2I(s) + 1s\,I(s) + \frac{1}{0{\cdot}5s}I(s) = \frac{50}{s} \qquad (٣)$$

أو

$$I(s) = \frac{50}{s^2 + 2s + 2} = \frac{50}{(s+1+j)(s+1-j)} \qquad (٤)$$

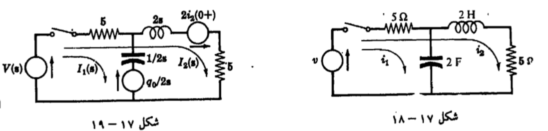
وبفك المعادلة (٤) بطريقة الكسور الجزئية نجد أن

$$I(s) = \frac{j25}{(s+1+j)} - \frac{j25}{(s+1-j)} \qquad (٥)$$

وينتج من معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (٥) التيار بدلالة الزمن

$$i = j25\{e^{(-1-j)t} - e^{(-1+j)t}\} = 50e^{-t}\sin t \text{ amperes}$$

١٧ — ١٣ فى الشبيكيتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧ — ١٨ ، اختيرا تيارا الشبيكة كما هو موضح فى الرسم . اكتب معادلات نطاق s فى الصيغة المصفوفية ثم صمم الدائرة المناظرة .



شكل ١٧ — ١٩   شكل ١٧ — ١٨

نكتب مجموعة المعادلات بدلالة الزمن

$$10i_2 + 2(di_2/dt) + 5i_1 = v \quad \text{و} \quad 5i_1 + \frac{1}{2}\int i_1\,dt + 5i_2 = v \qquad (١)$$

نأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (١) لنحصل على المعادلات المناظرة فى نطاق s

$$5\,I_1(s) + \frac{1}{2s}I_1(s) + \frac{q_0}{2s} + 5\,I_2(s) = V(s) \qquad 10\,I_2(s) + 2s\,I_2(s) - 2\,i_2(0+) + 5\,I_1(s) = V(s) \qquad (٢)$$

عند كتابة معادلات نطاق s فى الصيغة المصفوفية فإنه يمكن تعيين الدائرة فى نطاق s بفحص مصفوفات $Z(s)$ و $I(s)$ و $V(s)$ (أنظر الشكل ١٧ – ١٩)

$$\begin{bmatrix} 5 + 1/2s & 5 \\ 5 & 10 + 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(s) - q_0/2s \\ V(s) + 2i_2(0+) \end{bmatrix}$$

١٧ – ١٤ فى الشبكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧–٢٠ ، أوجد التيارين الناتجين عند غلق المفتاح

10 Ω
i_1 i_2
100 V
0·02 H
5 Ω

شكل ١٧ – ٢٠

المعادلات بدلالة الزمن للشبكة الكهربائية هى

$$10i_1 + 0{\cdot}02\frac{di_1}{dt} \quad 0{\cdot}02\frac{di_2}{dt} \quad 100 \qquad (١)$$

$$0{\cdot}02\frac{di_2}{dt} + 5i_2 - 0{\cdot}02\frac{di_1}{dt} \quad 0$$

بأخذ تحويل لابلاس للمجموعة (١) ،

$$(10 + 0{\cdot}02s)\,I_1(s) - 0{\cdot}02\,I_2(s) = 100/s \quad (5 + 0{\cdot}02s)\,I_2(s) - 0{\cdot}02s\,I_1(s) \quad 0 \qquad (٢)$$

من المعادلة الثانية فى المجموعة (٢) ، نجد أن

$$I_2(s) = I_1(s)\left(\frac{s}{s + 250}\right) \qquad (٣)$$

وبالتعويض بها فى معادلة نطاق s الأولى نحصل على

$$(10 + 0{\cdot}02s)\,I_1(s) - 0{\cdot}02s\left\{I_1(s)\left(\frac{s}{s + 250}\right)\right\} = \frac{100}{s} \qquad (٤)$$

أو

$$I_1(s) = 6{\cdot}67\left\{\frac{s + 250}{s(s + 166{\cdot}7)}\right\} \qquad (٥)$$

والآن بتطبيق طريقة الكسور الجزئية على المعادلة (٥) ، نجد

$$I_1(s) = \frac{10}{s} - \frac{3{\cdot}33}{s + 166{\cdot}7} \quad , \quad i_1 = 10 - 3{\cdot}33e^{-166{\cdot}7t} \text{ amperes} \qquad (٦)$$

وأخيراً بالتعويض بالمعادلة (٥) فى المعادلة (٣) نحصل على المعادلة فى نطاق s .

$$I_2(s) = 6{\cdot}67\left\{\frac{s + 250}{s(s + 166{\cdot}7)}\right\}\frac{s}{s + 250} = 6{\cdot}67\left(\frac{1}{s + 166{\cdot}7}\right) \quad , \quad i_2 = 6{\cdot}67e^{-166{\cdot}7t} \text{ amperes} \qquad (٧)$$

١٧ – ١٥ طبق نظريتى القيمة الابتدائية والنهائية على معادلتى نطاق s ، $I_1(s)$ و $I_2(s)$ فى المسألة ١٧ – ١٤ .

إن معادلتى نطاق s من المسألة ١٧ – ١٤ هما

$$I_1(s) = 6{\cdot}67\left\{\frac{s + 250}{s(s + 166{\cdot}7)}\right\} \quad , \quad I_2(s) = 6{\cdot}67\left(\frac{1}{s + 166{\cdot}7}\right)$$

والآن تعطى القيمة الابتدائية للتيار i_1 بالعلاقة

$$i_1(0) = \lim_{s\to\infty} [s I_1(s)] = \lim_{s\to\infty} \left[6{\cdot}67\left(\frac{s+250}{s+166{\cdot}7}\right)\right] = 6{\cdot}67 \text{ A}$$

والقيمة النهائية بالعلاقة

$$i_1(\infty) = \lim_{s\to 0} [s I_1(s)] = \lim_{s\to 0} \left[6{\cdot}67\left(\frac{s+250}{s+166{\cdot}7}\right)\right] = 6{\cdot}67(250/166{\cdot}7) = 10 \text{ A}$$

والقيمة الابتدائية للتيار i_2 هى

$$i_2(0) = \lim_{s\to\infty} [s I_2(s)] = \lim_{s\to\infty} \left[6{\cdot}67\left(\frac{s}{s+166{\cdot}7}\right)\right] = 6{\cdot}67 \text{ A}$$

والقيمة النهائية هى

$$i_2(\infty) = \lim_{s\to 0} [s I_2(s)] = \lim_{s\to 0} \left[6{\cdot}67\left(\frac{s}{s+166{\cdot}7}\right)\right] = 0$$

إن فحص دائرة الشكل ١٧ – ٢٠ يحقق كلا من القيم الابتدائية والنهائية السابقة . عند لحظة غلق المفتاح تكون معاوقة الحث لانهائية ويكون التيار $i_1 = i_2 = 100/(10+5) = 6{\cdot}67$ A. إذن فى الحالة المستقرة يظهر الحث كدائرة مغلقة ، إذن $i_1 = 10$ A و $i_2 = 0$.

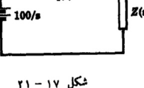
١٧ – ١٦ بالإشارة إلى دائرة الشكل ١٧–٢٠ ، أوجد المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية وحمم الدائرة باستخدام هذه المعاوقة .

فى نطاق s تكون معاوقة الحث 0.02 H هى $Z(s) = 0.02s$ والتى يمكن معالجتها تماماً مثل $j\omega L$ فى الحالة المستقرة الجيبية . وعلى ذلك فإن المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية عند النظر إليها من المصدر تكون

$$Z(s) = 10 + \frac{0{\cdot}02s(5)}{0{\cdot}02s+5} = \frac{0{\cdot}3s+50}{0{\cdot}02s+5} = 15\ \frac{s+166{\cdot}7}{s+250} \qquad (١)$$

ويوضح الشكل ١٧–٢١ الدائرة المحتوية على المعاوقة المكافئة .

والتيار هو

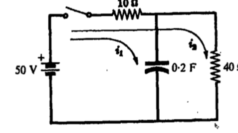


شكل ١٧ – ٢١

$$I_1(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{100}{s}\left\{\frac{s+250}{15(s+166{\cdot}7)}\right\} = 6{\cdot}67\left\{\frac{s+250}{s(s+166{\cdot}7)}\right\}$$

وهذا التعبير مطابق للمعادلة (٥) فى المسألة ١٧ – ١٤ ، وعلى ذلك فالدالة الزمنية هى $i_1 = 10 - 3{\cdot}33e^{-166{\cdot}7t}$ amperes

١٧ – ١٧ فى الشبيكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧ – ٢٢ لا يوجد شحنة ابتدائية على المكثف . أوجد تيارى الشبيكة الناتجين عند غلق المفتاح عند $t = 0$.



شكل ١٧ – ٢٢

معادلة الدائرة بدلالة الزمن هى

$$10i_1 + \frac{1}{0{\cdot}2}\int i_1\, dt + 10i_2 = 50 \qquad (١)$$

$$50i_2 + 10i_1 = 50$$

والمعادلتان المناظرتان فى نطاق s هما

$$10\,I_1(s) + \frac{1}{0{\cdot}2s}I_1(s) + 10\,I_2(s) = 50/s \;\; 50\,I_2(s) + 10\,I_1(s) = 50/s \qquad (٢)$$

وفى الصيغة المصفوفية هما

$$\begin{bmatrix} 10 + 1/0{\cdot}2s & 10 \\ 10 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/s \\ 50/s \end{bmatrix}$$

ومنها $I_1(s) = 5/(s + 0{\cdot}625)$ و $i_1 = 5e^{-0{\cdot}625t}$ amperes

لإيجاد i_2 نعوض عن قيمة i_1 فى المعادلة الثانية لمعادلتى نطاق الزمن (١) .

$50i_2 + 10(5e^{-0{\cdot}625t}) = 50$ و $i_2 = 1 - e^{-0{\cdot}625t}$ amperes

١٧ – ١٨ بالإشارة إلى المسألة ١٧ – ١٧ أوجد المعاوقة المكافئة فى نطاق s للشبكة الكهربائية وعين التيار الكلى ثم أوجد تيارى الفرعين وذلك باستخدام قاعدة تقسيم التيار .

المعاوقة المكافئة فى نطاق s هى

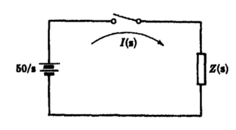
$$Z(s) = 10 + \frac{40(1/0{\cdot}2s)}{40 + 1/0{\cdot}2s} = \frac{80s + 50}{8s + 1} = 10\;\frac{s + 5/8}{s + 1/8} \qquad (١)$$

ويوضح الشكل ١٧ – ٢٣ الدائرة المكافئة ، والتيار الناتج هو :

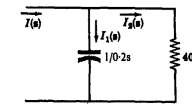
$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s}\left\{\frac{s + 1/8}{10(s + 5/8)}\right\} = 5\frac{s + 1/8}{s(s + 5/8)} \qquad (٢)$$

وبالتعبير عن المعادلة (٢) بصيغة كسور جزئية نجد :

$$I(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{s + 5/8}$$ ومنها نجد أن : $i = 1 + 4e^{-5t/8}$ amperes



شكل ١٧ – ٢٣



شكل ١٧ – ٢٤

والآن يمكن الحصول على تيارى الفرعين $I_1(s)$ و $I_2(s)$ باستخدام قاعدة تقسيم التيار . وبالإشارة إلى الشكل ١٧ – ٢٤ نجد لدينا

$$I_1(s) = I(s)\left(\frac{40}{40 + 1/0{\cdot}2s}\right) = \frac{5}{s + 5/8} \text{ and } i_1 = 5e^{-0{\cdot}625t} \text{ amperes}$$

$$I_2(s) = I(s)\left(\frac{1/0{\cdot}2s}{40 + 1/0{\cdot}2s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 5/8} \text{ and } i_2 = 1 - e^{-0{\cdot}625t} \text{ amperes}$$

١٧ – ١٩ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧ – ٢٥ أغلق المفتاح عند $t = 0$ وكان لايوجد شحنة ابتدائية على أى من المكثفين أوجد التيار الناتج ، كما هو موضح فى الرسم .

شكل ١٧ – ٢٥

يوجد للشبكة الكهربائية معاوقة مكافئة فى نطاق s هى :

$$Z(s) = 10 + \frac{(5 + 1/s)(5 + 1/0{\cdot}5s)}{(10 + 1/s + 1/0{\cdot}5s)} = \frac{125s^2 + 45s + 2}{s(10s + 3)} \qquad (١)$$

والتيار هو :

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s}\,\frac{s(10s + 3)}{(125s^2 + 45s + 2)} = \frac{4(s + 0{\cdot}3)}{(s + 0{\cdot}308)(s + 0{\cdot}052)} \qquad (٢)$$

وبالتعويض عن التيار فى نطاق s بدلالة كسور جزئية نجد :

$$I(s) = \frac{1/8}{s + 0{\cdot}308} + \frac{31/8}{s + 0{\cdot}052} \quad \text{و} \quad i = \frac{1}{8}e^{-0{\cdot}308t} + \frac{31}{8}e^{-0{\cdot}052t} \text{ amperes}$$

١٧ – ٢٠ طبق نظرية القيمة الابتدائية والنهائية على التيار فى نطاق s فى المسألة ١٧ – ١٩ .

بما أن : $I(s) = \frac{1/8}{s + 0{\cdot}308} + \frac{31/8}{s + 0{\cdot}052}$ فإن التيار الإبتدائى هو

$$i(0) = \lim_{s \to \infty} [s\,I(s)] = \lim_{s \to \infty} \left[\frac{1}{8}\left(\frac{s}{s + 0{\cdot}308}\right) + \frac{31}{8}\left(\frac{s}{s + 0{\cdot}052}\right)\right] = 4 \text{ A}$$

والتيار النهائى هو

$$i(\infty) = \lim_{s \to 0} [s\,I(s)] = \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{8}\left(\frac{s}{s + 0{\cdot}308}\right) + \frac{31}{8}\left(\frac{s}{s + 0{\cdot}052}\right)\right] = 0$$

بفحص الدائرة المعطاة فى الشكل ١٧ – ٢٥ يتبين لنا أن المقاومة الكلية للدائرة فى البداية هى $R = 10 + 5(5)/10 = 12{\cdot}5$ وعلى هذا فإن : $i(0) = 50/12{\cdot}5 = 4$ A وفى الحالة المستقرة يكون كل من المكثفين قد شحن لجهد مكافئ يساوى 50 volts وتيار يساوى صفراً .

مسـائل اضافية

١٧ – ٢١ أوجد تحويل لابلاس لكل دالة مما يأتى :

(أ) $f(t) = At$ (ج) $f(t) = e^{-at}\sin\omega t$ (هـ) $f(t) = \cosh\omega t$

(ب) $f(t) = te^{-at}$ (د) $f(t) = \sinh\omega t$ (و) $f(t) = e^{-at}\sinh\omega t$

الجواب (أ) – (هـ) أنظر الجدول ١٧ – ١ . (و) $(f)\ \frac{\omega}{(s+a)^2 - \omega^2}$

٢٧ – ٢٢ أوجد معكوس تحويل لابلاس لكل دالة مما يأتى :

(أ) $F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+1)}$ (د) $F(s) = \frac{3}{s(s^2+6s+9)}$

(ب) $F(s) = \frac{1}{s^2+7s+12}$ (هـ) $F(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+5}$ (ز) $F(s) = \frac{2s}{(s^2+4)(s+5)}$

(جـ) $F(s) = \frac{5s}{s^2+3s+2}$ (و) $F(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+13}$

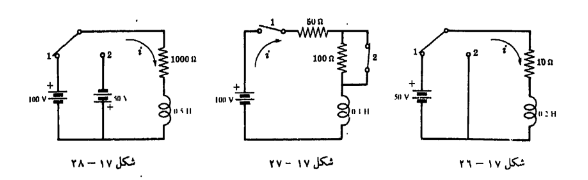
: (أ) $2e^{-2t} - e^{-t}$ (د) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} - te^{-3t}$ (ز) $\frac{10}{29}\cos 2t + \frac{4}{29}\sin 2t - \frac{10}{29}e^{-5t}$

(ب) $e^{-3t} - e^{-4t}$ (هـ) $e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t)$

(جـ) $10e^{-2t} - 5e^{-t}$ (و) $2e^{-2t}\cos 3t$

١٧ – ٢٣ دائرة تتكون من RL فيها $R = 10\ \Omega$ و $L = 0.2$ H يؤثر عليها جهد ثابت $V = 50$ volts عند $t = 0$.
أوجد التيار الناتج باستخدام طريقة تحويل لابلاس . الجواب : $i = 5 - 5e^{-50t}$ amperes

١٧ – ٢٤ فى دائرة التوالى RL الموضحة فى الشكل ١٧ – ٢٦ كان المفتاح عند الوضع 1 لفترة كافية للوصول إلى الحالة المستقرة ثم تحرك المفتاح إلى الموضع 2 عند $t = 0$. أوجد التيار .
الجواب : $i = 5e^{-50t}$ amperes



شكل ١٧ – ٢٦ شكل ١٧ – ٢٧ شكل ١٧ – ٢٨

١٧ – ٢٥ فى الدائرة الموضحة فى الشكل ١٧ – ٢٧ ، أغلق المفتاح 1 عند $t = 0$ ثم عند $t = t' = 4$ m sec فتح المفتاح 2
أوجد التيار العابر فى الفترتين $0 < t < t'$ و $t > t'$.

الجواب : $i = 2(1 - e^{-500t})$ amperes, $i = 1.06e^{-1500(t-t')} + 0.667$ amperes

١٧ – ٢٦ فى دائرة التوالى RL الموضحة فى الشكل ١٧ – ٢٨ أغلق المفتاح إلى الموضع 1 عند $t = 0$ وعند $t = t' = 50\ \mu$ sec تحرك المفتاح إلى الموضع 2 . أوجد التيار العابر فى الفترتين $0 < t < t'$ و $t > t'$.

الجواب : $i = 0.1(1 - e^{-2000t})$ amperes, $i = 0.06e^{-2000(t-t')} - 0.05$ amperes

١٧ – ٢٧ دائرة توالى RC فيها $R = 10\ \Omega$ و $C = 4\ \mu$F لها شحنة ابتدائية $q_0 = 800 \times 10^{-6}$ coulombs على المكثف عند الزمن الذى أغلق عنده المفتاح ، فإذا أثرنا عليها بجهد ثابت $V = 100$ volts فأوجد التيار العابر الناتج إذا كانت الشحنة (أ) لها نفس قطبية الشحنة التى يولدها المصدر . (ب) لها قطبية معاكسة .

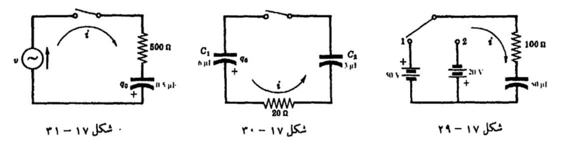
الجواب : (أ) $i = -10e^{-25\times10^3 t}$ amperes و (ب) $i = 30e^{-25\times10^3 t}$ amperes

١٧ – ٢٨ دائرة توالى RC فيها $R = 1000\ \Omega$ و $C = 20\ \mu F$ لها شحنة ابتدائية q_0 على المكثف عند الزمن الذى أغلق عنده المفتاح ، ، فإذا أثرنا عليها بجهد ثابت $V = 50$ ، وكان التيار الناتج هو $i = 0{\cdot}075e^{-50t}$ amperes فأوجد الشحنة q_0 وعين قطبيتها .

الجواب : 500×10^{-6} coulombs بقطبية عكس قطبية الشحنة التى يولدها المصدر .

١٧ – ٢٩ فى دائرة RC الموضحة فى الشكل ١٧ – ٢٩ أغلق المفتاح إلى الموضع 1 عند $t = 0$ وعند $t = t' = 1$ TC تحرك المفتاح إلى الموضع 2 . أوجد التيار العابر فى الفترتين $0 < t < t'$ و $t > t'$.

الجواب : $i = 0{\cdot}5e^{-200t}$ amperes, $i = -0{\cdot}516e^{-200(t-t')}$ amperes



شكل ١٧ – ٣١ شكل ١٧ – ٣٠ شكل ١٧ – ٢٩

١٧ – ٣٠ فى الدائر الموضحة فى الشكل ١٧ – ٣٠ ، كان على المكثف C_1 شحنة ابتدائية $q_0 = 300 \times 10^{-6}$ coulombs عند الزمن الذى أغلق عنده المفتاح . أوجد التيار العابر الناتج .

الجواب : $i = 2{\cdot}5e^{-2.5\times10^4 t}$ amperes

١٧ – ٣١ فى دائرة التوالى RC الموضحة فى الشكل ١٧–٣١ كانت الشحنة الإبتدائية على المكثف $q_0 = 25 \times 10^{-6}$ coulombs والجهد الجيبى المؤثر $v = 100 \sin (1000t + \varphi)$ volts أوجد التيار العابر الناتج إذا أغلق المفتاح عند الزمن الذى كانت عنده $\varphi = 30°$.

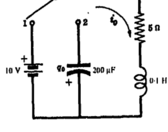
الجواب : $i = 0{\cdot}1535e^{-4000t} + 0{\cdot}0484 \sin (1000t + 106°)$ amperes

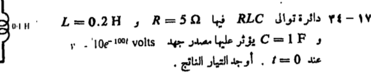
١٧ – ٣٢ دائرة توالى RLC فيها $R = 5\ \Omega$ و $L = 0.1$ H و $C = 500\ \mu F$ يؤثر عليها جهد ثابت $V = 10$ volts عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج .

الجواب : $i = 0{\cdot}72e^{-25t} \sin 139t$ amperes

١٧ – ٣٣ فى دائرة التوالى RLC الموضحة فى الشكل ١٧ – ٣٢ كانت الشحنة الإبتدائية على المكثف $q_0 = 1$ mC وظل المفتاح فى الموضع 1 لمدة تكفى للوصول إلى الحالة المستقرة . أوجد التيار العابر الذى ينتج عندما يتحرك المفتاح من الموضع 1 إلى الموضع 2 عند $t = 0$.

الجواب : $i = e^{-25t} (2 \cos 222t - 0{\cdot}45 \sin 222t)$ amperes





١٧ – ٣٤ دائرة توالى RLC فيها $R = 5\ \Omega$ و $L = 0.2$ H و $C = 1$ F يؤثر عليها مصدر جهد $v = 10e^{-100t}$ volts عند $t = 0$. أوجد التيار الناتج .

الجواب : $i = -0{\cdot}666e^{-100t} + 0{\cdot}670e^{-24.8t} - 0{\cdot}004e^{-0.2t}$ amperes

شكل ١٧ – ٣٢

١٧ – ٣٥ دائرة توالى RLC فيها $R = 200\Omega$ و $L = 0.5H$ و $C = 100\ \mu F$ لها مصدر جهد جيبى $v = 300 \sin (500t + \varphi)$ volts فإذا أغلق المفتاح عند الزمن الذى كانت عنده $\varphi = 30°$ فأوجد التيار العابر الناتج .

الجواب : $i = 0.517e^{-341.4t} - 0.197e^{-58.6t} + 0.983 \sin (500t - 19) \text{ amperes}$

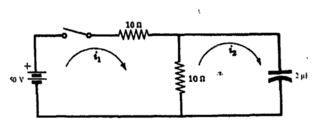
١٧ – ٣٦ دائرة توالى RLC فيها $R = 5\Omega$ و $L = 0.1\ H$ و $C = 500\ \mu F$ لها مصدر جهد جيبى $v = 100 \sin (250t + \varphi)$ volts فإذا أغلق المفتاح عند الزمن الذى كانت عنده $\varphi = 0°$ فأوجد التيار الناتج .

الجواب :

$i = e^{-25t} (5.42 \cos 139t + 1.89 \sin 139t) + 5.65 \sin (250t - 73.6°) \text{ amperes}$

١٧ – ٣٧ فى الشبيكيتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧ – ٣٣ اختيرت التيارات كما فى الرسم . اكتب المعادلات بدلالة الزمن ثم حولها إلى المعادلات المناظرة فى نطاق s ثم أوجد التيارين العابرين i_1 و i_2

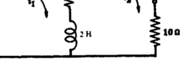
الجواب : $i_1 = 2.5(1 + e^{-10^5 t}) \text{ amperes}, i_2 = 5e^{-10^5 t} \text{ amperes}$

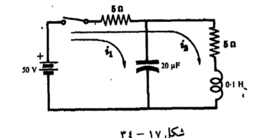


شكل ١٧ – ٣٣

١٧ – ٣٨ اوجد فى الشبيكيتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧ – ٣٤ التيارين i_1 و i_2 الناتجين عند غلق المفتاح عند $t = 0$.

الجواب : $i_1 = 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9950t} \text{ amperes}, i_2 = 5.05e^{-100t} + 5 + 0.05e^{-9950t} \text{ amperes}$





شكل ١٧ – ٣٥

شكل ١٧ – ٣٤

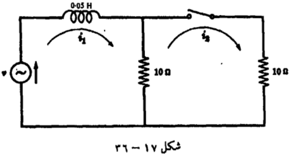
١٧ – ٣٩ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧–٣٥ يمرر مصدر الجهد 100 volts تيارا متصلا فى المسار المغلق الأول . فإذا أغلق المفتاح عند $t = 0$ وبذلك تتصل المقاومة $10\ \Omega$ على التوازى مع الفرع الذى يتكون من عنصرين على التوالى هما $R = 10\ \Omega$ و $L = 2H$. فأوجد التيارين الناتجين .

الجواب : $i_1 = 1.67e^{-6.67t} + 5 \text{ amperes}, i_2 = -0.555e^{-6.67t} + 5 \text{ amperes}$

١٧ - ٤٠ يؤثر على الشبيكتين الفرعيتين الشبكة الكهربالية الموضحة فى الشكل ١٧ – ٣٦ . مصدر جهد جيبى $v = 100 \sin(200t + \varphi)$ volts فإذا أغلق المفتاح عند $t = 0$ وكانت الزاوية $\varphi = 0$ وبذلك تتصل المقاومة $10\ \Omega$ الثانية على التوازى مع المقاومة الأولى . فأوجد تيارى الشبيكة الناتجين بالاتجاه الموضح فى الرسم .

الجواب :

$i_1 = 3{\cdot}01e^{-100t} + 8{\cdot}96 \sin(200t - 63{\cdot}4°)$ amperes, $i_2 = 1{\cdot}505e^{-100t} + 4{\cdot}48 \sin(200t - 63{\cdot}4°)$ amperes



شكل ١٧ – ٣٦

قائمة بالمصطلحات GLOSSARY

الفصل الأول : Chapter 1

English	العربية
Parameter	بارامتر — متغير
S.I. System	نظام مترى دولى
Dimensional Constant	ثابت أبعاد
Permeability Constant	ثابت نفاذية
Coulomb's Law	قانون كولوم
Permitivity Constant	ثابت السماحية
Electromotive Force (emf)	قوة دافعة كهربية
Generator	مولد
Power	قدرة
Periodic Function	دالة دورية
Period	دورة
Energy	طاقة
Resistor	مقاوم
Inductance	حث
Capacitor	مكثف
Pure	نقى
Resistance	مقاومة
Coil	ملف
Self Inductance	حث ذاتى
Capacitance	سعة
Kirchhoff's Law	قانون كيرشوف
Network	شبكة كهربائية
Instantaneous	لحظى
Square Wave	دالة مربعة
Sawtooth Function	دالة سن منشار
Waveform	شكل موجى
Discontinuous	غير متصل
Sinusoidal Function	دالة جيبية

Chapter 2 — الفصل الثانى :

English	العربية
Average Value	قيمة متوسطة
Effective Value	قيمة فعالة
Infinite	غير منتهى
Power Series	متسلسلة قوى
Root Mean Square Value	جذر متوسط مربع قيمة
Form Factor	عامل الشكل
Half Cycle Average	متوسط نصف الدورة
Independent Variable	متغير مطلق
Triangular Wave	موجة مثلثة الشكل
Half-Wave Rectification	تقويم نصف موجى
Full-Wave Rectification	تقويم موجى كامل
Delayed	معوقة
Graphical Solution	حل تخطيطى
Amplitude	سعة
Harmonic	توافق
Fundamental Harmonic	توافق أساسى
Rise Time	زمن الارتفاع
Radian	زاوية نصف قطرية
Phase	طور

Chapter 3 — الفصل الثالث :

English	العربية
Sinusoidal Current	تيار جيبى
Integrodifferential Equation	معادلة تكاملية تفاضلية
Transient Current	تيار عابر
Steady Current	تيار مطرد أو مستقر
Impedance	معاوقة
Phase Angle	زاوية الطور
Displacement	إزاحة
Lead	سابق
Lag	لاحق
Resonance	رنين
Frequency	ذبذبة
Parallel	توازى
Reactance	ممانعة

Chapter 4	الفصل الرابع :
Complex Numbers	أعداد مركبة
Real Numbers	أعداد حقيقية
Rational Numbers	أعداد جزرية
Irrationnal Numbers	أعداد صماء
Real Number Line	خط العدد الحقيقي
Imaginary	تخيلي
Imaginary Number Line	خط العدد التخيلي
Polar Representation	تمثيل قطبي
Modulus	مقياس
Argument	الإزاحة الزاوية
Stienmetz	شكل شتينميتز
Rectangular Form	صيغة أحداثيات متعامدة
Trigonometric Form	صيغة حساب مثلثات
Conjugate	مترافق
Binomial	ذات حدين
Numerator	بسط
Denominator	مقام
Slide Rule	مسطرة حاسبة
Cursor	الجزء المنزلق
Hairline	خط شعري

Chapter 5	الفصل الخامس :
Phasor Notation	ترميز طوري (أو مطاور)
Waveform	شكل موجي
Periodic	دوري
Fourier Method	طريقة فورير
Euler's Formula	صيغة إيلر
Particular Solution	حل خاص
Polar Form	شكل قطبي
Angular Velocity	سرعة زاوية
Exponential Function	دالة أسية
Shift Angle	زاوية تزحزح
Time Domain	مجال الزمن

Ohm's Law	قانون أوم
Frequency Domain	مجال الذبذبة
Subscript	رمز سفلى (دليل)
Locus	محل هندسى

Chapter 6	الفصل السادس :
Admittance	مسامحة
Reciprocal	معكوس
Conductance	مواصلة
Susceptance	تقبلية
Polarity	القطبية
Active Circuit	دائرة فعالة (نشطة)
Bridge	قنطرة

Chapter 7	الفصل السابع :
Power	قدرة
Power Factor	عامل القدرة
Alternator	مولد التيار المتردد
Passive	خامل (غير فعال)
Network	شبكة
Instantaneous Power	قدرة لحظية
Energy	طاقة
Apparent Power	قدرة ظاهرية
Reactive Power	قدرة مفاعلية
Quadrature	مركبة عمودية أو مركبة تربيعية
Load	حمل
Synchronous Motor	محرك تزامنى
Line Currant	تيار الخط

Chapter 8	الفصل الثامن :
Quality Factor	عامل الجودة
Band Width	إتساع الشريط
Phase Shifting Circuit	دائرة تغيير الطور

Chapter 9	الفصل التاسع :
Mesh	شبيكة
Network Tree	هيكل الشبكة الكهربائية
Link Branch	فرع اتصال
Junction	نقطة اتصال
Matrix	مصفوفة
Inversion	تعاكس
Determinant	محددة
Square Matrix	مصفوفة مربعة
Row	صف
Column	عمود
Sequence	متتابعة
Permutation	تبديل
Minors	محددات
Cofactor	عامل مشترك
Cramer's Rule	قاعدة كرامر
Driving Point Impedance	نقطة المعاوقة المحركة
Transfer Impendance	معاوقة الانتقال
Hay Bridge	قنطرة هاى
Owen Bridge	قنطرة أون
Voltage Transfer Function	دالة انتقال الجهد

Chapter 10	الفصل العاشر :
Node	عقدة
Node Voltage Method	طريقة جهد العقدة
Junction	نقطة اتصال
Reference Node	عقدة الاسناد
Self Admittance	مسامحة ذاتية
Mutual Admittance	مسامحة تبادلية
Transfer Admittance	مسامحة انتقال
Wien Bridge	قنطرة ڤين

Chapter 11	الفصل الحادى عشر :
Thevenin's Theorem	نظرية ثڤنين
Norton's Theorem	نظرية نورتن
Linear Network	شبكة خطية

Chapter 12 — الفصل الثانى عشر :

English	العربية
Delta	دلتـــا
Star	نجمة
Superposition Theorem	نظرية التراكب
Bilateral Network	شبكة ذات جانبين
Reciprocity Theorem	نظرية التبادل
Excitation	إثارة
Response	استجابة
Compensation Theorem	نظرية التعادل (أو المعادلة)
Substitution Theorem	نظرية التعويض
Dependent Source	مصدر غير مستقل
Potentiometer	مقياس الجهد
Maximum Power Transfer Theorem	نظريات انتقال أكبر قدرة
First Derivative	مشتقة تفاضلية أولى

Chapter 13 — الفصل الثالث عشر :

English	العربية
Mutual Inductance	حث تبادلى
Self Inductance	حث ذاتى
Flux	فيض
Magnetic Flux	فيض مغناطيسى
Induced e.m.f.	قوة دافعة كهربائية تأثيرية
Leakage	تسرب
Faraday's Law	قانون فارادى
Lenz's Law	قانون لينز
Heaviside Bridge	قنطرة هيفيسيد

Chapter 14 — الفصل الرابع عشر :

English	العربية
Polyphase	متعددة الأطوار
Ripple	تموج
Phasor	مطاور
Line Current	تيار الفرع
Phasor Diagram	شكل طورى
Wattmeter	الواتميتر
Line Voltage	جهد الفرع
Efficiency	كفـــاءة
Out Put	عطـــاء

Chapter 15 — الفصل الخامس عشر :

English	العربية
Fourier Method	طريقة فورير
Singular Function	دالة وحيدة
Finite	محدود
Harmonic	تردد
Frequency	ذبذبة
Trigonometric Series	متسلسلة مثلثية
Discontinuous	غير متصل
Dirichlet Conditions	شروط دريشليت
Converge	تتقارب
Exponential Series	متسلسلة أسية
Even Function	دالة زوجية
Odd Function	دالة [illegible]
Half – Wave Symmetry	تماثل نصف موجى
Line Spectrum	طيف خطى
Waveform Synthesis	تركيب الشكل الموجى
Effective Value	القيمة الفعالة
Root Mean Square Value	جذر متوسط مربع القيمة
Pulse	نبضة
L'Hospital's Rule	قاعدة لوبيتال

Chapter 16 — الفصل السادس عشر :

English	العربية
Transient Interval	فترة عابرة
Complementary Function	دالة متممة
Particular Solution	حل خاص
Operator	مؤثر
Order	رتبة
Exponential Rise	ارتفاع أسى
Time Constant	ثابت الزمن
Decay	اضمحلال
Short Circuit	دائرة مغلقة
Homogeneous Equation	معادلة متجانسة
Characteristic Equation	معادلة مميزة
Overdamped	زائد المضاءلة
Critical Damped	مضاءلة حرجة
Underdamp	ناقص المضاءلة

Slope	ميـــل
Complete Solution	حـــل تـــام
Method of Undetermined Coefficiens	طريقة المعاملات غير المحدودة
Simultaneous differential equations	معادلات تفاضلية آنية

Chapter 17 **الفصل السابع عشر :**

Laplace Transform	متحول (بديل) لابلاس
Time Domain	بدلالة الزمن
Step Function	دالة سلمية
Integration By Parts	تكامل بالتجزىء
Partial Fraction	الكسور الجزئية
Expansion Methods	طرف الفك
Quotient	خارج القسمة
Polynomial	كثيرة حدود
Degree	درجة
Heaviside Formula	صيغة هيفيسيد
Simple Poles	أقطاب بسيطة
Distinct	متميزة
Initial Value Theorem	نظرية القيمة الابتدائية
Final Value Theorem	نظرية القيمة النهائية

فهرس ابجـــدى

رقم الإيداع ٨٩/٥٢٠٦

مطابع المكتب المصرى الحديث
MODERN EGYPTIAN PRESS
الكيلو ١٠ الطريق الزراعى مصر/اسكندرية ص.ب ٣٥ شبرا الخيمة ت : ٩٥٧٩٥٩

- التبريد وتكييف الهواء — TROTT
- نظرية أنظمة الطاقة الكهربية - مقدمة — ELGERD
- الكهرومغناطيسيات الهندسية — HAYT
- الحرارة والديناميكا الحرارية — ZEMANSKY
- ميكانيكا الموائع وتطبيقاتها الهندسية — DAUGHERTY
- الميكانيكا الهندسية - استاتيكا — SHELLEY
- الميكانيكا الهندسية - ديناميكا — SHELLEY
- مقدمة فى الاستكشاف الجيوفيزيائى — DOBRIN
- تكنولوجيا الرسم الهندسى — FIRTH
- الهندسة الميكانيكية - نظرية الصناعة والدراسات المشتركة — BROWN
- الالكترونيات فى خدمة التطبيقات الكهربائية — MORRIS
- الالكترونيات العملية — WOOLLARD
- الجهزات والحاسبات الدقيقة لطلبة الهندسة والفنيين — WOOLLARD
- المبادئ الرقمية - شوم — TOKHEIM
- تكنولوجيا الالكترونيات - شوم — WILSON
- الدوائر الكهربائية - شوم — EDMINISTER
- الماكينات الكهربية والكهروميكانيكيات - شوم — NASAR
- الديناميكا الحرارية - شوم — ABBOTT
- ميكانيكا الموائع والهيدروليكا - شوم — GILES
- مقاومة المواد - شوم — NASH

967 094453 9